Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik

Detlef Gronau
Institut für Mathematik der
Karl-Franzens-Universität Graz

2009

Inhaltsverzeichnis

Stand: 29.4.2009

0 Einleitung

Eine Geschichte der Mathematik kann in einer 2–stündigen Vorlesung naturgegebenermaßen nur streifzugmäßig behandelt werden. Dabei spielen persönliche Vorlieben, eigenes Wissen und und auch Unwissen und natürlich auch Zufälligkeiten in der Auswahl die ausschlaggebende Rolle. Schwerpunkte habe ich dabei auf Entwicklungen gelegt, die zu Graz (Kepler, Guldin) und zu meinen eigenen Forschungsinteressen (Logarithmen, ...) in Beziehung stehen. Ich verweise daher auf die Literaturliste, die einen Auszug aus der reichhaltigen Literatur über die Geschichte der Mathematik bringt.

Die zeitliche Entwicklung der Geschichte kann man sehr augenfällig an der *Geschichtlichen Spirale* (siehe Seite 101) veranschaulichen. Die Vergangenheit verliert sich in einem unentwirrbaren Nebel, die Zukunft entschwirrt in weiter Ferne. Nur ein kleiner Teil, die mehr oder weniger jüngere Vergangenheit, liegt etwas deutlicher in geschichtlicher Erkenntnis vor uns. Es sei an dieser Stelle auch auf die Historische Tabelle im Anhang Seite 102 verwiesen.

0.1 Anfänge der Mathematik

Mathematik heißt **Ordnungbringen** in Problemen des Denkens und des Lebens. Entstehungsgeschichtlich ergeben sich damit folgende Zusammenhänge:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Zählen}} \arrow[d] & \boxed{\text{Messen}} \arrow[dl] \arrow[d] & \boxed{\text{Naturbeobachten}} \arrow[dl] \arrow[d] \\
\boxed{\text{Arithmetik}} & \boxed{\text{Geometrie}} & \boxed{\text{Astronomie}}
\end{tikzcd}$$

Man kann damit sagen, dass die Entwicklung des Zählens gemeinsam mit der Entwicklung des Denkens vor sich ging! Bis es zum abstrakten Zahlbegriff kam, dauerte es allerdings sehr lange Zeit. Wohl kann man Anfänge des Zählens in den Funden der älteren Steinzeit erkennen. Erste schriftliche, also mit *Worten* ausgedrückte Hinweise auf Arithmetik, Geometrie und Astronomie finden wir allerdings erst bei den Hochkulturen Ägyptens und Mesopotamiens und den frühen griechischen Kulturen.

Eine Voraussetzung für die Entwicklung von Wissenschaften im allgemeinen und der Mathematik im besonderen war einerseits eine intensivere Ausnützung der vorhandenen Resourcen der Natur (nicht nur “Jagen und Sammeln” sondern Ackerbau, Viehzucht, Bergbau etc.) und daraus resultierend andererseits eine Arbeitsteilung innerhalb der Lebensgemeinschaft, verbunden mit dem Problem einer gerechten Aufteilung der Produkte.

Eine Mathematik in der Form, wie wir sie uns heute vorstellen, also mit Axiomen, Theoremen und Beweisen unter der Ägide der Logik, ist nach unserem Wissensstand allerdings erst in den Hochkulturen der Griechen entstanden, beginnend vielleicht mit Thales von Milet, Pythagoras u.a..

Das Wort ***Mathematik*** stammt aus dem Griechischen. Im Lexikon findet man unter

μάθημα

die Eintragungen: *Erlerntes, Gegenstand des Lernens, Kenntnis, Wissenschaft*. Das Wort μάθησις heißt *Erlernen, Lehre, Kenntnis, Wissenschaft*, μαθηματοπωλικός bedeutet *mit Wissenschaften Handel treibend*.

0.2 Quellen über die Anfänge der Mathematik

Die Quellen, die uns Aussagen über die frühe Geschichte der Mathematik erlauben, sind naturgegebenerweise sehr vage:

1. **Ur- und Frühgeschichte**.

   - So zeigt als einer der ältesten Funde eines "Kerbholzes" aus der älteren Steinzeit einen Hinweis auf das Zählen. Es handelt sich dabei um einen 1937 in Vestonice (Mähren) gefundenen 7 Zoll langen Wolfsknochen, in welchem 55 tiefe Kerben eingeschnitten sind, von denen die ersten 25 in Gruppen zu 5 angeordnet sind. Danach kommt eine doppelt so lange Kerbe, die die Reihe abschließt; dann beginnt von der nächsten, ebenfalls doppelt so langen Kerbe eine neue Reihe, die bis 30 läuft.[1] Abbildungen von diesem und anderen Knochenfunden findet man in [12], S. 111:

   - Weiters gibt es Funde von Keramiken (Vasen und sonstige Tongefäße) mit herrlichen geometrischen Mustern aus der jüngeren Steinzeit (siehe Wußing [26], S. 32)
   - Bauten aus der Ur- und Frühgeschichte lassen auf eine beginnende Astronomie, die ohne Zählen und Messen nicht möglich ist, schließen.
   - Die Beobachtung von Naturvökern in Australien, Amerika und Afrika lässt ebenfalls Rückschlüsse über die Entstehung mathematischer Begriffe ziehen. So kennt deren Sprache oft nur die Zahlwörter für 1 und 2, alles andere wird mit "viele" bezeichnet. An anderer Stelle ist das Zahlwort an das zu zählende Medium gebunden. So bedeutet etwa auf den Fidschi Inseln *"bole"* soviel wie 10 Kähne, dagegen werden 10 Kokosnüsse mit dem Zahlwort *"karo"* bezeichnet. Es fehlt also noch die *"abstrakte Zahl."*

2. Über die **Ägypter** erfahren wir durch die *Papyrusrollen* als erste Dokumente. Die ältesten Papyri, die noch erhalten sind, stammen aus ca. 1800 v.u.Z.:
   Papyrus Rhind, benannt nach dem Engländer A.H. Rhind (Archäologe aus dem 19.Jhdt.), der ihn in Luxor kaufte und dann dem British Museum in London vermachte, ferner das
   Moskauer Papyrus (benannt nach dem jetzigen Aufbewahrungsort).

   Als weitere Quellen dienen uns die *Griechischen* Philosophen, Mathematiker und Geschichtsschreiber (Aristoteles, Demokrit, Herodot), die (voller Lob) über die ägyptischen Mathematiker schrieben.

3. Aus **Mesopotamien** kennen wir vor allem *Tontafeln*. Wegen ihrer größeren Haltbarkeit sind sie besser erhalten und geben Auskünft über die Entwicklung der babylonischen (= mesopotamischen) Mathematik. Es wurden davon ganze "Bibliotheken" gefunden.

4. Aus **Indien** und **China** sind uns die älteren Schriften auf *Palmblättern* erhalten. Wegen der geringen Haltbarkeit sind sie nicht so alt und reichen nur bis ca. 600 v.u.Z. zurück. Sicher ist die Mathematik Indiens und insbesondere Chinas älter, aber das "sagenhafte Alter" der chinesischen Mathematik scheint historisch nicht gesichert zu sein.

5. Die Quellen über die **griechische Mathematik** werden später eingehend behandelt.

[1] ISIS 28, 462/463(1938), siehe Struik [22], S. 4.

1 Mathematik vor den Griechen

1.1 Anfänge der Mathematik

Die einfachsten Anfänge der Mathematik in einer Kulturgemeinschaft sind wohl bei der Ausbildung eines Zahlsystems zu sehen. Zahlen als abstrakte Idee kamen erst sehr langsam in Gebrauch. Die Entwicklung von Handwerk (Arbeitsteilung und Spezialisierung) und Handel trug wesentlich zur Herausbildung eines abstrakten Zahlbegriffes bei. Um das Abzählen leichter zu machen, wurden größere Einheiten eingeführt, also Gruppen zu 5 oder 10 aber auch 20. Man kann annehmen, dass hier die Anzahl der Finger bzw. der Finger und Zehen eine gewisse Rolle gespielt hat. Andererseits ist psychologisch nachzuweisen, dass eine Menge von Dingen, deren Anzahl kleiner oder gleich 5 beträgt, noch leicht mit *einem Blick abzuzählen* ist. Eine Untersuchung von 307 Zahlsystemen primitiver amerikanischer Stämme hat ergeben, dass davon 146 Dezimalsysteme waren, 106 verwendeten 5 als Grundeinheit, oder 5 und 10 oder auch 20 oder 5 und 20 als Grundeinheiten (siehe Struik [22], S.3). Das Zwanzigersystem kam in seiner ausgeprägtesten Form bei den *Mayas* in Mexiko und bei den *Kelten* in Europa vor. Dies hat sich noch in der französischen Sprache z.B. im Wort "quatre-vingt" für 80 niedergeschlagen.

Es ergab sich natürlich auch die Notwendigkeit, Länge, Fläche und Rauminhalt von Gegenständen zu messen, das heißt mit Normmaßen zu vergleichen. Diese waren oft recht roh, etwa nach Körperteilen wie Elle und Fuß ausgerichtet. Das Messen von größeren Längen wurde mit Seilen vorgenommen. Das englische Wort *"straight"* für *gerade* ist eng mit dem Wort *"stretch"* ist gleich *spannen* verwandt. In vielen Ländern war das Wort ***Seilspanner*** ein Synonym für *Landvermesser*.

Naturgemäß ist über diese Anfänge bei den einzelnen Völkern wenig bekannt. Wir fangen daher bei der Mathematik der Ägypter und Mesopotamier an, da wir mehr Quellen über sie haben und deren mathematische (wie auch sonstige zivilasitorische) Errungenschaften bei weitem über die der heute noch bekannten Naturvölker hinausging. Auf Grund der vorliegenden Quellen kann man auch den Schluss ziehen, dass das Niveau der Mathematik bei den Ägyptern und Mesopotamiern zu ihren Zeiten wohl "Weltspitze" war. Eine hervorragende Darstellung der Mathematik der Ägypter und Mesopotamier ist bei B.L. van der Waerden [24], *Erwachende Wissenschaft* zu finden. Wesentliche Teile des nachfolgenden Textes wurden aus diesem Buch, sowie aus Wußing [26] entnommen, ohne es jeweils im einzelnen zu zitieren.

1.2 Die Mathematik der Ägypter

Heute sind wir der Ansicht, dass die Mathematik, so wie wir sie verstehen, mit den Griechen beginnt. Die Griechen ihrerseits hingegen führten allgemein den Ursprung der Mathematik auf die Ägypter zurück. Der Philosoph ARISTOTELES, (384 – 322 v.u.Z.) meint in seinem Werk *Methaphysik, A1*, dass dort die mathematischen Künste deswegen begründet worden seien, weil in Ägypten nämlich die Priesterschaft die nötige Muße dazu gehabt habe. Praxisbezogener sah es jedoch der Geschichtsschreiber HERODOT (500 – 424 v.u.Z.): Wenn der Nil das Land überschwemmt und evtl. ein Stück des Ackers weggeschwemmt hatte, musste das Land neu vermessen werden, um die Steuern neu zu berechnen, und *"dies war,* *wie mir scheint, der Anfang der Geometrie, die dann nach Griechenland kam."* Und der Mathematiker Demokritos von Abdera (460 – 371 v.u.Z.) schreibt: *"Im Konstruieren von Linien und Beweisen übertrifft mich keiner, selbst nicht die sogenannten Seilspanner aus Ägypten".*

1.2.1 Der Papyrus Rhind

Der ***Papyrus Rhind*** stammt aus ca. 1800 v.u.Z., geht aber auf eine ältere Vorlage aus dem Mittleren Reich (2000 – 1800) zurück, wie sein Schreiber Ahmes versichert. Er wurde für die *königlichen Schreiber*, einem eigenen Berufsstand geschrieben. Der Papyrus fängt sehr vielversprechend an:

"Kunstgerechtes Eindringen in alle Dinge, Erkenntnisse alles Seienden, aller Geheimnisse ..." verspricht er zu lehren. Allerdings stellt sich dann heraus, dass nicht der Urgrund der Dinge hier entschleiert wird, sondern dass es nur die Geheimnisse der Zahlen und der Bruchrechnung sind, in die der Leser hier eingeweiht werden soll, mit Anwendungen auf vielerlei praktische Probleme, mit denen es die Beamten des großen Reiches zu tun hatten: Verteilung von Lohnsummen an die Arbeiter, Berechnung des Getreidebedarfes für die Zubereitung einer bestimmten Menge Brot oder Bier, Berechnung von Flächen und Rauminhalten, Umrechnung von Getreidemaßen usw.. Dazwischen gibt es aber auch rein theoretische Aufgaben zur Einübung in die schwierige Technik des Bruchrechnens.

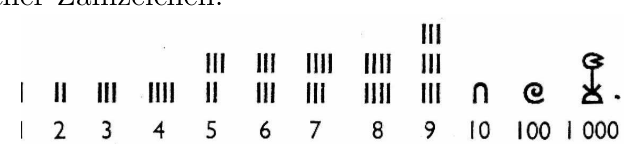
Einen Einblick in den Aufgabenkreis eines königlichen Schreibers gibt ein anderer Papyrus (Anastasi I) in dem ein Schreiber einen anderen ermahnt, seine Kenntnisse zu erweitern:

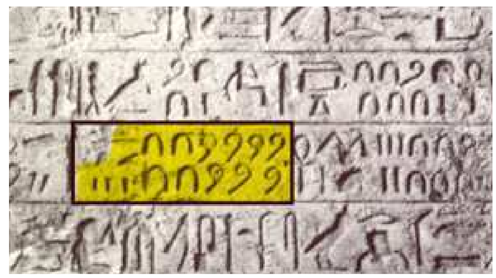
Man gibt Dir einen See auf, den Du graben sollst. Da kommst Du zu mir, um Dich nach dem Proviant für die Soldaten zu erkundigen und sagst: Rechne ihn mir aus. Du lässt Dein Amt im Stich und es fällt mir auf den Nacken, dass ich Dich seine Ausübung lehren muss ... Denn sieh, Du bist ja der erfahrene Schreiber, der an der Spitze des Heeres steht. Es soll eine Rampe gemacht werden, 730 Ellen lang und 55 Ellen breit, die 120 Kästen enthält und mit Rohr und Balken gefüllt ist; oben 60 Ellen hoch, ... Man erkundigt sich nun bei den Generälen nach dem Bedarf an Ziegeln für sie, und die Schreiber sind alle versammelt, ohne dass einer unter ihnen etwas weiß. Sie vertrauen alle auf Dich und sagen: "Du bist ein erfahrener Schreiber, mein Freund, so entscheide das schnell für uns."

1.2.2 Das Rechnen der Ägypter

Das Zahlensystem der Ägpter ist einfach und primitiv, wie etwa das römische Zahlsystem und ist wie dieses rein dezimal aufgebaut, wobei für die einzelnen Zehnerpotenzen je ein eigenes Symbol verwendet wird. Es wird dabei die *Hieroglyphenschrift* (Bilderschrift) verwendet (siehe Wußing [26], S.35 oder Hogben [11], S. 30).

Beispiele ägyptischer Zahlzeichen:





Der ägyptische Schreiber aus der Zeit um 2500 v. Chr., der in der Plastik verewigt ist, könnte den Eingang von Steuern verbucht haben; er benutzt dazu Zahlzeichen, wie sie in dem obigen Schema dargestellt sind. Auf der oben abgebildeten Sandsteinstele von 1450 v. Chr. stehen die Zahlzeichen mit höherem Stellenwert rechts von den Zeichen mit niedrigerem Stellenwert. Die Ziffern der Zahl siebenhundertdreiundvierzig sind in der Reihenfolge unserer Zahl 347 angeordnet (zitiert nach ([11], S. 30).

Die Zahlsymbole werden hier im folgenden aus drucktechnischen Gründen nur annähernd angedeutet:

Tabelle einiger Zahlsymbole

1	senkrechter Strich wie $\vert$
10	nach unten gebogener Haken, wie $\bigcap$
100	Spirale wie 9 (manchmal auch spiegelverkehrt)
1000	symbolisierte Papyrusrolle
10.000	leicht gebogener Haken wie $\rceil$
...	...

So bedeutet dann etwa $\begin{matrix}9\cap\cap|||\\ 9\cap\cap|||\end{matrix}$ die Zahl 246. Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen und auch Divisionen werden ausführlichst in den Papyri dargestellt. Bei der Division gab es die Schwierigkeiten, dass die Ägypter nicht mit Brüchen der Form $\frac{a}{b}$ rechneten, sondern nur mit sogenannten *"Stammbrüchen"*, d.h. Brüchen der Form $\frac{1}{n}$ und $\frac{2}{3}$ sowie auch einige weitere spezielle Brüche. Es gab ganze Tabellen, wie man beliebige Brüche als Summe von Stammbrüchen darstellen konnte.

1.2.3 Hau-Rechnungen

Das ägyptische Wort *“Hau”* bedeutet soviel wie *Haufen* oder *Menge*. Die Hau-Rechnungen entsprechen etwa unseren linearen Gleichungen in einer Unbekannten. Ein einfaches Beispiel findet man in Rhind Nr. 26:

“Eine Menge und ihr Viertel geben zusammen 15.”

Die ägyptische Lösung fängt so an: *‘Rechne 4 davon musst Du ein Viertel nehmen, nämlich 1; zusammen 5.”* Und sinngemäß geht es dann so weiter: 5 ist in 15 gerade 3 mal enthalten. Multipliziere nun die 4 mit diesen 3 ergibt 12. Das ist das Ergebnis. Probe: 12 und sein Viertel, also 3 ergeben zusammen 15.

Was hier gemacht wurde ist die Methode des *“Falschen Ansatzes:”* Man nimmt zuerst eine Zahl an, 4, die sich leicht durch 4 teilen lässt, addiert dazu dessen Viertel also 1, ergibt 5 und schaut mit welcher Zahl man das Ganze multiplizieren muss, dass 15 herauskommt.

Eine andere Hau-Rechnung findet man im *“Berliner Papyrus 6619”*, zu deren Lösung auch Quadratwurzeln gezogen werden müssen:

“Ein Quadrat und ein zweites, dessen Seite $\frac{3}{4}$ (im Text steht natürlich $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, d.h. $\frac{3}{4}$ wird als Summe von Stammbrüchen dargestellt) *von der Seite des ersten Quadrates ist, haben zusammen den Flächeninhalt 100. Lass mich wissen”*

Die Lösung wieder mit der Methode des falschen Ansatzes ergibt als Seitenlängen 8 bzw. 6.

Die Hau-Rechnungen bilden den Gipfel der ägyptischen Rechenkunst. Weiter als bis zu linearen Gleichungen und rein quadratischen Gleichungen konnte man aber bei der Primitivität der Rechenkunst kaum gelangen. Die Hau-Rechnungen entsprangen nicht nur Problemen der Praxis. Sie zeugen oft vom rein theoretischen Interesse der ägyptischen Rechenmeister. Sie sind offensichtlich von solchen Leuten ausgedacht, die Spaß am reinen Rechnen hatten und ihren Schülern schwere Aufgaben zur Übung aufgeben wollten

Allerdings gibt es auch (z.B. im Papyrus Rhind) angewandte Rechnungen, z.B. die sog. *“pesu”-Rechnungen*, die sich mit den zur Zubereitung von Bier oder Brot benötigten Getreidemengen befassen. Andere Aufgaben beschäftigen sich mit dem Umrechnen von Scheffeln in andere Einheiten, mit der Berechnung von Futtermengen, der Verteilung von Lohnsummen und ähnlichem.

1.2.4 Die Geometrie der Ägypter

Die Geometrie der Ägypter ist ebenso wie die Arithmetik (also die Lehre von den Zahlen) noch keine Wissenschaft im heutigen Sinne, sondern eine Art angewandtes Rechnen. Es geht in erster Linie darum, Flächen und Rauminhalte zu berechnen. Dazu muss man die entsprechenden Regeln aufstellen.

- Flächeninhalte von **Dreiecken und Trapezen** wurden nach den richtigen Formeln berechnet: Die Basis eines Dreieckes wird halbiert, “um das Dreieck viereckig zu machen” und dann mit der Höhe multipliziert. Genauso wird bei einem Trapez die Summe der parallelen Seiten halbiert und dann mit der Höhe multipliziert.

- Um den Flächeninhalt von **Kreisen** zu berechnen, erheben die Ägypter $\frac{8}{9}$ des Durchmessers ins Quadrat. Das entspricht der guten Näherung von

$$\pi \sim 2^2 \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3,16049\ldots.$$

  Diese Güte der Näherung ist den Ägyptern hoch anzurechnen, denn die sonst mathematisch viel weiter entwickelten Mesopotamier begnügten sich mit dem Wert $\pi = 3$, den auch VITRUVIUS[2] nennt und den man auch bei den Chinesen und in der Bibel (1. Könige VII, 23) wiederfindet.

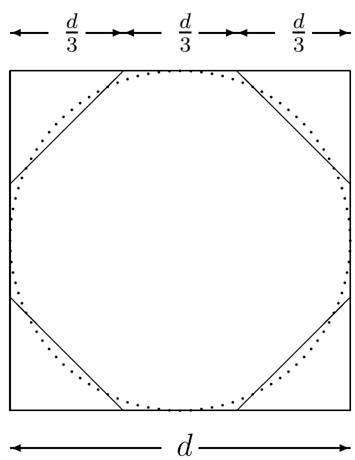
- Das Volumen eines **Pyramidenstumpfes** mit quadratischer Grundfläche wird vollkommen richtig im Papyrus Moskau mit der Formel

$$V = (a^2 + ab + b^2)\frac{h}{3},$$

  berechnet, wobei h die Höhe ist, a die Seite der Grundfläche und b die der Deckfläche ist.

- Auch die Formeln für das Volumen anderer Körper, wie Würfel, Prisma, Zylinder (Getreidefass) und Pyramiden findet man schon bei den Ägyptern

Es erhebt sich natürlich die Frage, wie die Äypter solche Formeln für Flächen und Volumina erhalten haben. Darüber kann man nur spekulieren. Bei der **Kreisfläche** könnte es etwa so gewesen sein (siehe Pfeiffer [20], S.122): Einem Quadrat mit der Seitenlänge d wird ein Achteck einbeschrieben:



Dieses Achteck nähert in etwa den Kreis mit Durchmesser d an. Für $d = 9$ berechnet sich die Fläche des Achteckes mit $81 - 2 \cdot 3^2 = 63$. Also ist die Fläche des Achteckes etwa gleich groß wie die eines Quadrates der Seitenlänge 8. Ein Kreis mit Durchmesser d hat also in etwa die Fläche des entsprechenden Achteckes, d.h. also $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$ (siehe oben). Die Zahl π, als Fläche des Einheitskreises (d.h. $d = 2$) hätte somit den Wert $\pi = 3.16049....$ Eine Zeichnung dieses Quadrat-Achteckes findet man im ***Papyrus Rhind*** , und zwar im Zusammenhang mit der Berechnung des Volumens eines Zylinders. Auch die Zahl 9 ist in diesem Achteck vermerkt.

[2] MARCUS VITRUVIUS POLLIO, römischer Architekturtheoretiker im 1. Jhdt. v.u.Z.

Eine andere Deutung (siehe Gericke [7], S. 55) läuft darauf hinaus, dass man den Kreis mit Durchmesser d durch ein Quadrat mit Seite s ersetzt, wobei man von d einen Bruchteil abzieht, wobei natürlich ein Stammbruch der Form $\frac{1}{n}$ in Frage kommt:

$$s = d - \frac{1}{n} \cdot d = d\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Die Ägypter wählten $n = 9$, was tatsächlich die beste Annäherung ergibt. $n = 8$ oder $n = 10$ liefert schlechtere Werte.

Abschließend kann man feststellen, dass die Ägypter sicher eine vergleichsweise hochstehende Rechentechnik besaßen, geometrische Probleme auch z.T. in großartiger Weise gelöst haben. Dies wurde sicher dadurch gefördert, dass der Nil durch seine Überschwemmungen nicht nur Schaden, sondern auch Gutes bewirkte (Bedüngung und Bewässerung der Felder). Diesen Segen konnte man sich aber nur dadurch zunutze machen, indem man das Bau- und Wirtschaftswesen entwickelte. Und dabei ist zumindest elementare "Mathematik" unbedingt vonnöten.

Von "Beweisen" aber, selbst in großzügigster Auslegung, ist in keinem der Papyri auch nur eine Spur zu finden.

Wohl haben die Griechen viele Rechenregeln aus Arithmetik und Geometrie der Ägypter übernommen. Aber eine Mathematik in dem Sinne, wie es dann die Griechen verstanden gab es mit größter Wahrscheinlichkeit bei den Ägyptern noch nicht. Zur Wesensart der ägyptischen "Mathematik" gehörte nun einmal das umständliche Bruchrechnen, auf das man keine höhere Algebra aufbauen kann, sowie die eindeutig auf simple Anwendungen ausgerichtete Geometrie. Wesentlich mehr haben die Griechen von den Mesopotamiern profitiert.

1.3 Die Mathematik der Mesopotamier (Babylonier)

Das damalige Mesopotamien ("Zwischenstromland" zwischen Euphrat und Tigris) lag südlich des heutigen Bagdad und reichte bis zum persischen Golf. Schon um 3.500 v.u.Z. gab es dort bereits große Städte und Tempelanlagen. Auch hier übte das Trotzen gegen die Naturgewalten der Flüsse und deren Beherrschen die Rolle des Auslösers einer höheren Kultur. Es mussten Überschwemmungen bewältigt werden und es wurden künstliche Bewässerungsanlagen gebaut.

Nach 3.300 wanderten die *Sumerer* aus dem Osten (vermutlich Indien) in dieses Land ein. Sie hatten ein eigenes Ziffernsystem beruhend auf der Basis 60. Es handelte sich um Zeichen zunächst in Bilderschrift, später dann in einer stilisierten *Keilschrift*: *Keile* drücken sich in Tontafeln gut ein. Zunächst hatte man noch eigene Zeichen für $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 10, 60, 60^2, 60^3. Später wurde das unten beschriebene *Positionssystem* eingeführt.

Um ca. 2.500 gab es Einwanderungen durch nordbabylonische semitische Völker, die Akkader, gennant nach der Stadt Akkada, die die Kultur der Sumerer (Schrift, Rechentechnik, Astronomie) übernahmen und weiterentwickelten.

Im Laufe der Zeit bildete sich das *Großreich Babylonien* mit der Hauptstadt *Babylon*. Technik (z.B. künstliche Bewässerungsbauten), Wirtschaft und Handel hatten ein beträchtliches Niveau erreicht. Bekannt ist vor allem die Dynastie der ***Hammurapi***, 1730 – 1685 v.u.Z.. So gibt es den *"Code Hammurapi"*, die erste bekannte schriftliche Niederlegung eines Gesetzestextes über Zivil- und Handelsrecht. Aus dieser Zeit stammen auch die meisten der vielen Tontafeln, die ja wesentlich haltbarer als etwa Papyrusrollen sind. Man hat bei den Ausgrabungen ganze "Bibliotheken" von Keilschrifttafeln gefunden, die Wissenschaftliches, Gesetze, Verwaltungsvorgänge aber auch Heldensagen enthalten. Mathematische Tontafeln sind sehr zahlreich vorhanden und zwar aus verschiedenen Epochen, sodass auch eine Aussage über die Entwicklung der Mathematik gemacht werden kann.

Gegen Ende des 2. Jt. verlor Babylonien an Einfluss. Das politische Gewicht verlagerte sich mehr in Richtung Vorderasien und Ägäis. Mesopotamien wurde ab ca. 600 v.u.Z. von den Persern besetzt. Wissenschaftliche Zentren entstanden ebenfalls in der Ägäis, aber auch die indische und chinesische Kultur erlebte einen großen Aufschwung. Dennoch blieb z.B. Babylon infolge der relativen Toleranz der persischen Eroberer noch jahrhundertlang ein bedeutendes Kulturzentrum. Dies schuf die Möglichkeit zur Weitergabe des babylonischen Wissens an Perser, Phönizier und dann auch an die Griechen.

1.3.1 Das Rechnen der Mesopotamier

Gemessen an der ägyptischen, stand die mesopotamische Mathematik auf einem wesentlich höheren Niveau. Aber auch hier war sie primär von den gesellschaftlichen Anforderungen geprägt. Die mathematischen Probleme stammten mit sehr großem Anteil von Wasserbauproblemen wie Kanalbau, Dammbau und Feldvermessung.

Das babylonische Zahlsystem war ein ***Sexagesimalsystem***, also ein *Positions - Zahlsystem* zur Basis 60. Es gab zunächst zwei Zeichen:
Ein *Keil* 𒁹 für die Grundeinheit: 𒁹 könnte 1, aber auch 60 oder auch $\frac{1}{60}$ oder sonst eine Potenz von 60, je nach *Position*, bedeuten.
Ein *Haken* 𒌋 für den Wert 10.

Keil und Haken hatten so eine Gestalt, wie sie entsteht, wenn man mit einem kantigen Stab in den weichen Ton eindrückt.

Das Zeichen 𒌋 𒁹 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 bedeutet in der Sexagesimaldarstellung 11;7 .[3] Das wiederum könnte den Wert $11 \cdot 60 + 7$ aber auch $11 + \frac{7}{60}$ darstellen. Das Problem war, dass man die Größenordnung der Zahl aus dem Kontext entnehmen musste.

Ein zweites Problem war, dass z.B. das Zeichen 𒁹 𒁹𒁹𒁹𒁹 sowohl $60 + 4$ aber auch $60^2 + 4$ darstellen konnte. Es musste also notgedrungen so etwas wie die ***Null*** als Platzhalter eingeführt werden. Dies wurde im Laufe der Zeit mittels eines Doppelhakens 𒑊 eingeführt.
𒁹 𒑊 𒁹𒁹𒁹𒁹 bedeutet somit $60^2 + 4$.

Es erhebt sich folgende Frage: Warum gerade das *Sexagesimalsystem*? *Weshalb also wurde von den Babyloniern gerade 60 als Einheit genommen?*

[3]Wir verwenden hier und in den folgenden Beispielen eine Abkürzung der Zahlen im Sexagesimalsystem in folgender Form:

$$a, b; c \;:=\; a \cdot 60 + b \cdot 1 + c \cdot \frac{1}{60},$$

wobei die Zeichen a, b, c Werte aus dem Bereich zwischen 0 (eigentlich nur 1) und 59 annehmen können.

Dazu gibt es folgende Deutung: Die Zahl 60 ist durch sehr viele Zahlen teilbar; wenn also die darunterliegende Grundeinheit ein 60-tel der vorhergehenden Grundeinheit ist, dann ist das Teilen leichter. Dies gilt z.B. bei den Maßeinheiten:

1 Talent = 60 Minen

1 Mine = 60 Scheffel,

aber auch bei Geld, und insbesondere bei den Winkeleinheiten mit Vollkreis, Grad, Minuten und Sekunden kam das 60-er System voll zur Anwendung. So sind $2\frac{1}{25}$ Grade gleich $2°2'24''$.

1.3.2 Mathematische Errungenschaften der Mesopotamier

Die mathematische Entwicklung der Mesopotamier ging ab etwa 2.500 v.u.Z. parallel zu der der Ägypter.

1. **Rechnen:** Man kannte alle Grundrechnungsarten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Es gab *Tabellenwerke* für das *"Kleine Einmaleins"*, das ja nun von 1×1 bis 59×59 ging, ferner Reziprokentafeln, d.h. Tafeln, die die Division auf die Multiplikation mit dem Inversen des Dividenden zurückführen, sowie Quadrat- und Kubikwurzeltafeln, wobei auch Interpolation im Tabellensuchen angewandt wurde. Weiters gab es Näherungsformeln für die Quadratwurzel von N der Form:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{N}{a}\right),$$

   wobei N eine natürliche Zahl ist und die natürliche Zahl a so gewählt ist, dass die Ungleichung $a^2 \leq N < (a+1)^2$ gilt und $b = N - a^2$ gesetzt wird.

   Daneben werden mathematische Probleme behandelt und gelöst, die weit über dem Niveau der Ägypter standen. Umformungen nach bestimmten Regeln (Formeln) wurden vorgenommen.

2. **Arithmetik:** (Siehe v.d. Waerden [24], S.100f.) Folgende Probleme wurden behandelt und richtig gelöst (beschrieben in unserer heute gewohnten Notation, bis zu einer Formelschreibweise wird es noch mehrere tausend Jahre dauern!):

   (a) *Gleichungen in einer Unbestimmten:*
   $ax = b$, $x^2 = a$, $x^2 \pm ax = b$, $x^3 = a$, $x^2(x+1) = a$

   (b) *Gleichungssysteme in 2 Unbestimmten:*

      i. $x \pm y = a$, $x \cdot y = b$

      ii. $x \pm y = a$, $x^2 + y^2 = b$

   (c) *Formeln:*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$1 + 2 + \cdots + 2^n = 2^n + (2^n - 1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n\right)(1 + 2 + \cdots + n)$$

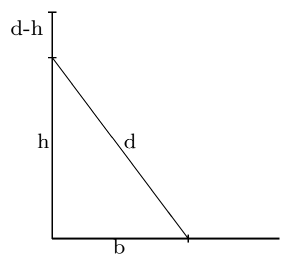
   Weiters arithmetische Reihen und sog. "Pythagoräische Zahlen" (siehe dazu auch Seite 24) $x^2 + y^2 = z^2$ nach der Regel

$$x = p^2 - q^2,\ y = 2pq,\ z = p^2 + q^2.$$

3. **Geometrie:** Auch die Geometrie war auf einem erstaunlichen Niveau. So kannte man:
   Proportionalität bei Parallelen (Strahlensatz)
   Flächen von Dreieck und Trapez
   Fläche und Umfang des Kreises mit $\pi = 3$
   Volumen von Prismen und Zylinder
   dagegen falsche Formeln für Kegelstumpf und Pyramiden (mit quadratischer Grundfläche)
   Pythagoräischer Lehrsatz: Hier ein Beispiel dafür aus einem altbabylonischen Text (siehe v.d.Waerden [24], S. 122):

   Ein palû (Balken?) 0;30 lang (steht angelehnt). Oben ist er um 0;6 herabgekommen. Von unten (wie weit hat er sich entfernt?) Die eingeklammerten Wörter sind ergänzt, aber der Sinn ergibt sich aus der vorgerechneten Lösung.

   Die Aufgabe läuft darauf hinaus, von einem rechtwinkligen Dreieck, von dem die Hypothenuse $d = 0;30$ und eine Kathete $h = 0;30 - 0;6 = 0;24$ gegeben ist, die zweite Kathete b zu berechnen. Diese wird auch kunstgerecht nach “Pythagoras” ausgerechnet:

   $$b = \sqrt{d^2 - h^2} = 0;18.$$

   Ähnliche Aufgaben gab es dann in allen möglichen auch späteren babylonischen Tontafeln bis in das Jahr 300 v.u.Z., ja selbst bei Fibonacci (um 1200 u.Z.) findet man noch ein solches Beispiel, allerdings mit einer Lanze, die irgendwo anlehnt.

Zur Illustration, wie damals mathematische Texte formuliert worden sind, sei noch ein weiteres altbabylonisches Beispiel aus der Zeit der Hammurapi - Dynastie (also ca. 1700) zitiert (siehe v.d.Waerden [24], S.102):

Länge und Breite habe ich multipliziert und so die Fläche gemacht. Wiederum was die Länge über die Breite hinausgeht, zur Fläche habe ich addiert und es gibt 𒐈 𒐈.

Wiederum Länge und Breite addiert ergibt ⟨⟨ 𒐌 .

Wenn also x und y die zu bestimmenden Längen und Breiten sind, dann formuliert dieser Text die lineare Gleichungen für x und y:

$$x \cdot y + (x - y) = 183 \quad \text{und} \quad x + y = 27. \tag{1}$$

Der Text liefert auch die Lösungsvorschrift:

Zahlen im Sexagesimalsystem:	Übersetzung:
27 die Summe von Länge und Breite,	$x \cdot y + 2x = 183 + 27$
addiere zu 3,3 ergibt 3,30	$x(y + 2) = 210$
2 zu 27 addiere gibt 29	$x + (y + 2) = 29$
Seine Hälfte ist 14;30	$\frac{29}{2} = 14\frac{1}{2}$
14;30 mal 14;30 ist 3,30;15	$\left(14 + \frac{1}{2}\right)^2 = 196 + 14 + \frac{1}{4} = 180 + 30 + \frac{15}{60}$
davon 3,30 subtrahierst Du, ist 0;15	also: $\sqrt{\left(\frac{29}{2}\right)^2 - 210} = \frac{1}{2}$
0;15 hat 0;30 als Quadratwurzel	

0;30 zur ersten 14;30 addiere ist 15 als Länge
0;30 von der zweiten 14;30 subtrahiere ist 14 als Breite
2 das Du zu 27 addiert hast, von 14 der Breite subtrahierst Du, gibt 12 als endgültige Breite

Anschließend wird noch mit $x = 15$ und $y = 12$ Probe gemacht.

Wie kam man nun zu dieser Lösung? Mit $y' = y + 2$ ist das Gleichungssystem (1) übergeführt in

$$x \cdot y' = a, \ x + y' = b.$$

Die Lösung davon ist gegeben durch:

$$x = \frac{b}{2} + w, \ y' = \frac{b}{2} - w \ \text{ mit } \ w = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a}.$$

und diese Formel wurde oben verwendet mit $a = 210$ und $b = 29$.

1.3.3 Eigenheiten der babylonischen Mathematik

Die babylonische Mathematik ist in ihrem Wesen her "algebraisch", d.h. die Geometrie ist mehr ein Hilfsmittel: Zahlen und Quadratzahlen werden durch Strecken bzw. Flächen veranschaulicht. Es werden Formeln verwendet (und selten auch hergeleitet). Insbesondere gab es während ihres Bestehens eine stetige Fortentwicklung. So wurden im Laufe der Zeit spezielle Zeichen für Addition und Multiplikation und eine Art Gleichheitszeichen eingeführt. Von einer strengen Beweisführung, wie sie dann von den Griechen eingeführt wurde, kann jedoch noch keine Rede sein.

Ihre *Anwendungen* erhält die Mathematik hier, analog wie bei den Ägyptern in bautechnischen und wirtschaftlichen Problemen, weiters wurden hier aber auch Zinseszinsprobleme behandelt, sowie Probleme von Metallegierungen. Ein weiteres Anwendungsgebiet war aber auch die *Astronomie*. Wegen des günstigen *Positionssystemes* konnte man mit beliebig großen Zahlen und beliebiger Genauigkeit rechnen. So wussten die Mesopotamier in der persischen Zeit (ca. 300 v.u.Z.) die Länge eines Sonnenjahres mit $12 + \frac{22}{60} + \frac{8}{60^2}$ Monaten anzugeben. Tabellen über Planetenstände (sog. Ephemeriden) wurden angelegt und viele astronomische Berechnungen gemacht.

Auf diesen Errungenschaften hat dann später Klaudios Ptolemaios ($83 - 161$ u.Z.) aufgebaut und von den Babyloniern die Stunden-Minuten-Sekundeneinteilung der Zeit sowie die Gradeinteilung des Vollkreises übernommen und so ist sie dann (über die Araber) zu uns gekommen.

Abschließend kann man sagen, dass die mesopotamisch - babylonische Mathematik, wie auch die Mathematik der Ägypter, eine Vorstufe und gute Basis für die griechische Mathematik bildete, wenn sie auch von der beweisenden Mathematik weit entfernt war. Ihre Rechenkunst hatte ein recht hohes Niveau, das bereits Züge echten algebraischen Denkens aufweist, wie es erst am Ausgang der Antike wieder annähernd erreicht und im islamischen Bereich seit dem 10 Jhdt. u.Z. sowie im christlichen Westen sogar erst während der Renaissance übertroffen werden konnte.

2 Die Mathematik der Griechen

2.0 Vorgeschichte

Die Einführung der Bronze (erste Hälfte des 3. Jt.s v.u.Z.)[4] bedeutet für Griechenland den *Beginn einer neuen Ära*. Die Landwirtschaft der griechischen Halbinsel entwickelt sich dank dem Gebrauch neuer Technologien (insbesondere dem Pflug), die Bevölkerung vermehrt sich, die Siedlungen vervielfachen sich. Zwischen 2000 und 1950 v.u.Z. wanderten aus dem Nordosten sogenannte indogermanische Völkerschaften ein, die dann als die *"Griechen"* bezeichnet wurden. Weitere Zuwanderungen gab es dann noch um 1600 und später dann um 1200. Man begegnet im Griechenland dieser Zeit folgenden Kulturen:

- **Kultur der Paläste** oder **Minoische** Kultur auf Kreta, zwischen 2000 und 1000 v.u.Z., benannt nach dem König Minos. Hier hat die griechische Kultur eine ihrer Wurzeln; bedeutende Bauten (insbesondere auf Knossos) sind Zeugen einer hochstehenden Zivilisation. Viehzucht, Landbau und Handel werden stark entwickelt, eine eigene Schrift entsteht, zuerst eine Art Hieroglyphenschrift (bis ca. 1500), dann eine Lautenschrift.
- **Mykenekultur.** Diese ebenfalls durch Kunstwerke und prächtige Bauten gekennzeichnete Kultur entwickelte sich parallel auf dem Festland (Athen, Mykonos, Troja) und wurde stark von der minoischen Kultur beeinflusst.

Mit dem Niedergang dieser Kulturen, z.T. bedingt durch große Völkerbewegungen beginnt das sogenannte

- **Dunkle Zeitalter** (12. Jhdt – $\sim$ 750). Dieser Niedergang der hochstehenden minoisch-mykenischen Kulturen brachte aber auch einen Neubeginn und neuen Aufschwung mit neuen Technologien, wie zum Beispiel *Eisen-* und *Keramikproduktion* (erste "protogeometrische Vasen"). Die **Stadt als Lebensform** entsteht, es gibt eine Herrschaft der *Adeligen* in autarken sozialen Verbänden sowie *Sklavenhaltung*. Gegen Ende des Dunkeln Zeitalters wurde von den Griechen ein großer Teil des Mittelmeeres kolonisiert.

Als Marksteine für die Entstehung einer kulturellen Einheit Griechenlands kann man anführen:

- Die Epen Homers, 'Ilias', 'Odysse' (2. Hälfte des 8. Jhdt.s).
- Olympische Spiele (die Liste der Olympiasieger beginnt mit dem Jahre 776).
- Hesiod (griech. Dichter, um 700). "Hellas" als Bezeichnung für Griechenland. Hesiod führt dies auf den Mythos "*Hellen* als Stammvater" der Griechen zurück.
- Erste reine Buchstabenschrift. Das phönikische Alphabet wird aufgenommen und durch Vokale ergänzt. Diese neue Schrift ist viel einfacher und kann dadurch von jedermann und nicht nur von Privilegierten erlernt werden.

Im 7. Jhdt. wird das System durch Verschuldung und Erbteilung bedroht, es entstehen Konkurrenzkämpfe unter den einzelnen Adelsfamilien und dies führt (ab ca. 650) zur **Tyrannenherrschaft**. Gleichzeitig erleben wir auch den Beginn einer Gesetzgebung als Voraussetzung für die Entstehung einer hochstehenden Kunst und Literatur.

[4] Lit.: Der Große Ploetz, Auszug aus der Geschichte, Verlag Ploetz, Freiburg - Würzburg, 1980, S.96.

Die Quellen einer Geschichtsschreibung über die griechische Mathematik sind noch immer recht dürftig, wenn es aber auch schon etwas mehr schriftliche Dokumente darüber vorhanden sind als bei den Ägyptern und Mesopotamiern. Allerdings ist das meiste nur sekundäre Literatur. Originalschriften sind keine mehr vorhanden, nur einige Fragmente in Form von Papyri aus der Zeit 200 u.Z. (kurz vor Diophant). Abschriften von mathematischen Beiträgen gibt es dann ab der Zeit Euklids (300 v.u.Z.). Die ältesten Euklid-Handschriften stammen aus dem 9. Jhdt. u. Z.. Jedoch sind Zeugnisse durch Philosophen, Historiker oder Bearbeiter von Manuskripten vorhanden:

- Herodot, ($\sim$ 490– $\sim$ 430) Griechischer Geschichtsschreiber, dem wir einige Information über die Mathematik verdanken.
- Platon, ($\sim$ 429– $\sim$ 348 v.u.Z.) in seinen "Dialogen".
- Euklid, ($\sim$ 300 v.u.Z.) in seinen "Elementen" ([6]). .
- Eudemos von Rhodos, ($\sim$ 300 v.u.Z.). Auf Anregung von Aristoteles verfasste Eudemos mehrere Schriften zur Geschichte der Arithmetik, Geometrie ("Geometerkatalog") und Astronomie. Er wird somit als der erste Mathematikhistoriker bezeichnet.
- Plutarchos ($\sim$ 46 – 119 u.Z.) Philosoph, Schriftsteller und Biograph.
- Ptolemaios ($\sim$ 83 – 161 u.Z.) Astronom, Mathematiker und Geograph.
- Proclos Diadochos, (410 – 485 u.Z.). Von ihm ist ein Kommentar zu Euklids Elementen überliefert, sowie eine Übersicht über die Geschichte der Mathematik von Thales ($\sim$ 600 v.u.Z.) bis ca. 300 v.u.Z., wobei er Eudemos zitiert.

Die griechisch-hellenistische **Mathematik** kann man in folgende 3 Perioden einteilen:

1. **Ionische Periode (Ende 7.Jhdt. – Mitte 5.Jhdt.v.u.Z.):** Vorbereitung und Herausbildung einer eigenen Wissenschaft *Mathematik*. Diese Periode mündet in der Krise (Inkommensurable Größen).
2. **Athenische Periode (** $\sim$ 450– $\sim$ 300 **v.u.Z.):** *"Geometrische Algebra"* ist der rettende Ausweg aus der Krise.
3. **Alexandrinische Periode (bis** $\sim$ 150 **u.Z.):** Höhepunkt, Vollendung und Niedergang der griechischen Mathematik.

Bevor wir auf diese Perioden im einzelnen eingehen werden, soll aber noch das ***griechische Zahlsystem*** behandelt werden. **Die griechische Zahlenschrift** war im Vergleich zur ausgezeichneten babylonischen eigentlich ein Rückschritt. In ältester Zeit hatte man eine Schreibweise, welche ungefähr den allgemein bekannten römischen Ziffern entspricht. Hier einige Beispiele (siehe v.d. Waerden, [24], S. 75):

|	Γ	Δ	H	X	M
1	5	10	100	1000	10000

Die Buchstaben Γ, Δ, H, X, M sind die Anfangsbuchstaben der griechischen Wörter für die Zahlen 5, 10, 100, 1000, 10000.

Später führte man dann eine kürzere alphabetische Schreibweise für dieses *dezimale Zahlsystem* ein:

1-9	α, β, γ, δ, ε, ς, ζ, η, ϑ	(6 = ς = Vau)
10-90	ι, κ, λ, μ, ν, ξ, o, π, ϙ	(90 = ϙ = Koppa)
100-900	ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ϡ	(400 = υ = Upsilon, 900 = ϡ = Sampi)
1000-9000	͵α, ͵β, etc.	(Strich links unten)

Um die Zahlen von den Wörtern zu unterscheiden, fügte man zum Schluss einen Strich hinzu oder setzte einen Stirch darüber, zum Beispiel:

$$\overline{,\alpha\tau\varepsilon} \quad \text{oder} \quad ,\alpha\tau\varepsilon' = 1305.$$

Zahlen größer als ein Myriade $M = 10^4$, wurden mit dem Zeichen M geschrieben, zum Beispiel:

$$\overset{\kappa\varepsilon}{M}\ \mu\gamma' = 25043.$$

Statt $\overset{\kappa\varepsilon}{M}$ konnte man auch $\ddot{\kappa}\ddot{\varepsilon}$ schreiben. Für höhere Potenzen von M hatten Archimedes und Appollonius wieder andere Schreibweisen.

Die Benutzung von Buchstaben für bestimmte Zahlen war für die Entwicklung der Algebra nicht gerade vorteilhaft. Man hatte die Buchstaben nun nicht mehr für unbestimmte und unbekannte Zahlen zur Verfügung.

Die Zentren der mathematischen Schulen während der griechischen Antike waren im gesamten östlichen Mittelmeerraum verstreut (siehe die Karte in Wußing [26], S. 49). Sie reichten von Sizilien (Syrakus), dem Fusse Italiens (Kroton, Neapel, Tarent), Ägäis (Athen, Abdera), Kleinasien (Byzanz, Smyrna, Miletos, Knidos, Rhodos, Perge) bis nach Ägypten (Alexandrien).

2.1 Ionische Periode (Ende 7.Jhdt. – Mitte 5.Jhdt.v.u.Z.)

Man kann vermuten, dass die Völker, die um ca. 1900 v.u.Z. in die ägäische Halbinsel eingewandert sind, die *Ionier* waren. Später bevölkerten sie dann auch die Westküste Kleinasiens *(Ionien)*, Sizilien und das untere Italien. Seit dem 7. Jhdt. hatten sich die griechisch-ionischen Stadtstaaten an der Küste Kleinasiens und den vorgelagerten Inseln zu bedeutenden wirtschaftlichen, politischen und kulturellen Zentren entwickelt. In Miletos, einer der einflussreichsten Handelsstädte, wirkten die hervorragendsten *ionischen Naturphilosophen*, wie Anaximandros, Anaximines und vor allem Thales.

Diese ionischen Naturphilosophen vollzogen den historischen Wandel in der Naturbeobachtung vom alleinigen *Beobachten* der Naturphänomene zum *Erklären*, auf der Grundlage einer *realistischen dialektischen Einstellung.* So wird nur mehr das Denken und das Wort (→Logik) und nicht religiöse Mystik zur Erklärung des Seins herangezogen. Dies gilt auch und gerade für die mathematischen Probleme, die damals noch gänzlich im Rahmen der *Philosophie* (Liebe zur Weisheit) behandelt wurden. Es wurde das Wesen der *Definition* erkannt, *Beweise* für Behauptungen (Theoreme) werden erstmals geführt. Der mathematische Wissensschatz, der zum mehr oder weniger großen Teil von den Ägyptern und Mesopotamiern übernommen wurde, erhielt nun eine logische Struktur:

$$\boxed{\textit{Voraussetzung}} \quad \boxed{\textit{Satz}} \quad \boxed{\textit{Beweis}}$$

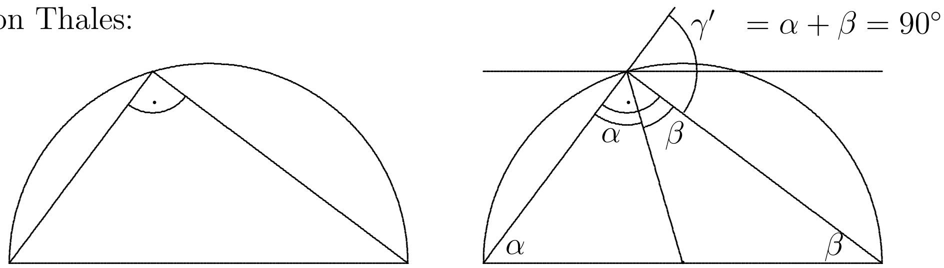
Die *Mathematik* als Wissenschaft wurde geboren.

2.1.1 Thales von Milet, $\sim 624 - \sim 546$ v.u.Z.

Thales von Milet stand wohl am Anfang dieser Entwicklung. Er war äußerst vielseitig und galt als *"einer der sieben Weltweisen."* Es soll ihm gelungen sein, die Sonnenfinsternis vom 28. Mai 585 vorauszusagen (allerdings nur das Jahr) und während einer Reise als Kaufmann nach Ägypten soll er die Höhe einer Pyramide aus ihrer Schattenlänge bestimmt haben.

Die Überlieferung schreibt Thales die folgenden Sätze zu, die schon vorher verwendet wurden, nun aber expliziert als mathematische Sätze ausgesprochen und auch (zumindest der Überlieferung nach) bewiesen wurden.

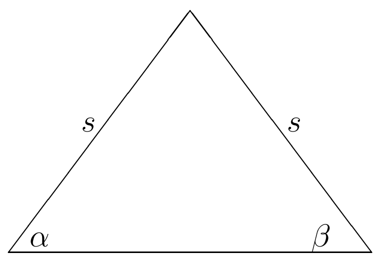
- Satz von Thales:



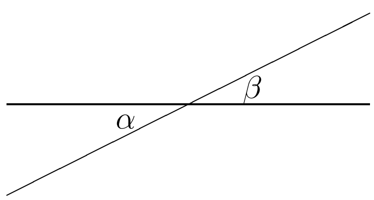
- Die Kreisfläche wird von ihrem Durchmesser halbiert.

- Satz über gleichschenkelige 3-Ecke:

  $\alpha = \beta$



- Scheitelwinkelsatz:



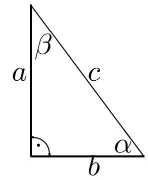
  $\alpha = \beta$

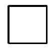
- Zwei 3-Ecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den angrenzenden 2 Winkeln übereinstimmen.

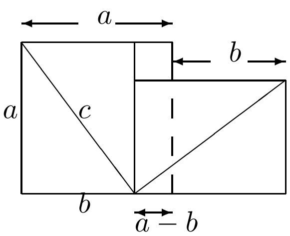
- Möglicherweise hat er auch den Satz über die Winkelsumme von Dreiecken ausgesprochen und bewiesen.

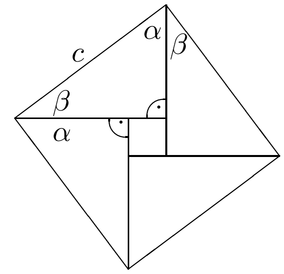
2.1.2 Pythagoras von Samos ($\sim 560 - \sim 480$ v.u.Z.) und die Pythagoräer

2.1.2.1 Vorbemerkung. Der "Satz von Pythagoras" für rechtwinkelige Dreiecke (*Pythagoräischer Lehrsatz*) ist allgemein bekannt. Die Ägypter verwendeten ihn vermutlich und die Mesopotamier verwendeten ihn bestimmt, wie wir bereits erfahren haben. Erstmals finden wir bei den Griechen, dass sie es für notwendig erachten, diese Eigenschaften von rechtwinkeligen 3-Ecken zu beweisen. Hier ein elementargeometrischer Beweis, der nicht unbedingt historisch ist (man kann ihn allerdings schon bei den Chinesen vor 200 v.u.Z. finden, siehe Seite 51), aber zeigt, welche elementaren Sätze über die Geometrie zur Anwendung kommen.:

4× 

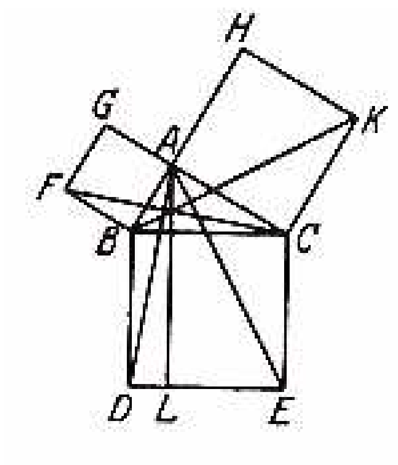
\+ 

= 

= 

Also $a^2 + b^2 = c^2$.

In den Elementen von Euklid ([6], Buch I, § 47) ist der folgende Beweis:



Die Dreiecke ABD und FBC sind kongruent. Ihr Flächeninhalt ist einerseits gleich der halben Fläche des Quadrats AF und andererseits gleich der halben Fläche des Rechteckes BL. Also ist die Fläche des Quadrates AF gleich der Fläche des Rechteckes BL. Analog ist die Fläche des Quadrates HC gleich der Fläche des Rechteckes CL (Die Dreiecke AEC und CKB sind kongruent).

2.1.2.2 Die Person Pythagoras. Pythagoras ist auf Samos geboren, die Angaben über sein Geburtsjahr schwanken zwischen 600 und 560 v.u.Z.. Nach Reisen nach Ägypten und Babylonien ging er um 529 nach Unteritalien (Kroton), wo er eine Art Orden gründete, in dem es vor allem um harmonische Lebensführung ging. Dieser Orden hatte alle Merkmale einer religiösen Sekte oder eines Geheimbundes, mit Vorschriften über Geheimhaltung, Nahrung (Vegetarismus), Kleidung, speziellen Beerdigungsriten etc.. Der Orden der ***Pythagoräer*** hatte zeitweise großen Einfluss, wurde aber auch befehdet, so dass er um ca. 510 aus Kroton vertrieben wurde und Pythagoras nach Metapont zog, wo er auch starb.

Herodot bezeichnete Pythagoras als einen der bedeutendsten *"Sophisten"* (Weisheitslehrer). Inwieweit Pythagoras den nach ihm benannten Satz auch selbst bewiesen hat, ist nicht klar. Proclos sagt in seinem Kommentar zu den Elementen von Euklid im Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras: *"Schenken wir denjenigen Gehör, die das Altertum erforschen wollen, so werden wir finden, dass sie dies Theorem auf Pythagoras zurückführen und berichten, er habe der Entdeckung halber einen Stier geopfert."* Da Pythagoras Tieropfer aber ablehnte, ist zumindest der letzte Teil dieser Legende fragwürdig. Wir wissen ja, dass obiger Satz im Inhalt bereits bei den Mesopotamiern bekannt war, so könnte Pythagoras ihn dort kennengelernt und einen Beweis aber sehr wohl sebst gefunden haben.

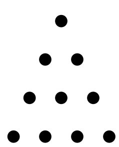
2.1.2.3 Die Pythagoräer. So nennt man die Schule bzw. den Orden von Pythagoras. Ein spezifisches Merkmal war, dass man die Vereinigung mit dem Göttlichen durch die Versenkung in die wunderbaren Gesetze der Zahlenwelt erreichbar sah, aus der Überzeugung heraus, dass die Gesetzmäßigkeiten der Welt durch die Harmonie der Zahlen bestimmt sei. *"Alles ist Zahl!"* Mathematik war ein Teil ihrer Religion. Durch diesen religiösen Dienst an der Mathematik wurde durch die Pythagoräer auch ein wesentlicher Fortschritt in der Mathematik erreicht. So wurden auch diese mathematischen Erkenntnisse wie bei Thales und den anderen ionischen Naturphilosophen auf der Basis von Postulaten (Axiome), Definitionen formuliert und bewiesen. Die Formulierungen waren abstrakt und ohne Bezug auf die Realität; Anwendungen schienen nicht von Bedeutung zu sein.

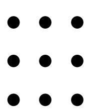
2.1.2.4 Mathematische Leistungen der Pythagoräer. Folgende Mathematische Erkenntnisse kann man den Pythagoräern zuschreiben. Sie haben Problemstellungen formuliert, Behauptungen aufgestellt und meist auch bewiesen.

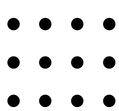
1. **Zahlenmystik.** Hier werden besondere Eigenschaften bestimmter Zahlen behandelt.

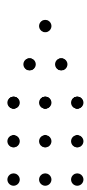
   (a) *"Lehre von den geraden und ungeraden Zahlen:" Eine Zahl heißt gerade, wenn sie sich durch 2 teilen lässt, sonst ungerade. Die Summe zweier geraden wie auch zweier ungeraden Zahlen ist gerade, die Summe einer ungeraden Zahl mit einer geraden Zahl ist ungerade. Das Produkt von zwei Zahlen, von denen eine gerade ist, ist wieder gerade* (als Beispiele dafür, dass man mathematische Begriffe definiert und daraus weitere Eigenschaften herleitet).

   (b) *"Figurierte Zahlen:"* Dazu gehören *Dreieckszahlen, Quadratzahlen, Rechteckszahlen und Fünfeckszahlen:*

      i.  Also: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

      ii.  Also: $1 + 3 + 5 \cdots + 2n - 1 = n^2$

      iii.  Also: $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

      iv.  Also: $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

   (c) *"Vollkommene Zahlen:"* Zum Beispiel: $1 + 2 + 3 = 6$, d.h. 6 ist Summe seiner Teiler, exakter: Eine Zahl n heißt ***vollkommene Zahl***, falls gilt:

$$n = \sum_{d|n, 1 \le d < n} d.$$

Für *gerade vollkommene Zahlen* gab dann später Euklid (*Elemente* [6], IX, § 36) eine Darstellung, mittels der man auch leicht die Zahlen 28, 496, 8128 als vollkommene Zahlen erkennen konnte. Zu erwähnen ist dabei, dass hier bei Euklid schon die später sogenannten ***Mersenneschen Primzahlen*** (das sind Primzahlen der Form $2^k - 1$, $k \in \mathbb{N}$) eine Rolle spielen. Der christliche Theologe und Philosoph Augustinus (354 – 430) begründete die Erschaffung der Welt in sechs Tagen damit, dass Gott die Vollkommenheit seines Werkes auch durch die Vollkommenheit der Zahl 6 zum Ausdruck bringen wollte.

Leonhard Euler zeigte dann um 1747, dass Euklid in seiner Formel alle geraden vollkommenen Zahlen angegeben hatte:

Satz (Euklid-Euler): *Eine gerade natürliche Zahl n ist genau dann vollkommen, wenn n die folgende Form hat:*

$$n = 2^{k-1}\left(2^k - 1\right) \quad \textit{wobei} \;\; k \geq 2 \;\; \textit{und} \;\; 2^k - 1 \;\; \textit{eine Primzahl ist.}$$

Es gibt also soviele vollkommene Zahlen, wie es Mersennesche Primzahlen $2^k - 1$ gibt. Derzeit (Ende 2003) sind 40 solche Primzahlen bekannt. Die größte ist $2^{20.996.011} - 1$, eine Zahl mit 6.320.430 Dezimalstellen (Internationale Mathematische Nachrichten, ÖMG Wien, Nr. 194, Dez. 2003, S. 55). Somit kennt man bis jetzt 40 vollkommene Zahlen. Ob es auch *ungerade* vollkommene Zahlen gibt, ist bis heute noch unbekannt.

(d) *"Befreundete Zahlen:"* Die Zahlen m, n heißen ***befreundete Zahlen***, falls gilt:

$$m = \sum_{d|n, 1 \leq d < n} d \;\text{ und }\; n = \sum_{d|m, 1 \leq d < m} d$$

So sind

$$\begin{array}{rcl} 284 & = & 1+2+4+5+10+20+11+22+44+55+110 \\ 220 & = & 1+2+4+71+142 \end{array}$$

befreundet. Formeldarstellungen dafür hat erstmals Descartes (René Descartes, 1596 – 1650) in einem Brief 1638 an Mersenne (Marin Mersenne, 1588 – 1648) niedergeschrieben. *Die Zahlen*

$$2^{k+1}\left(18 \cdot 2^{2k} - 1\right) \quad \textit{und} \;\; 2^{n+1}\left(3 \cdot 2^k - 1\right)\left(6 \cdot 2^k - 1\right)$$

sind befreundet, wenn der zweite Faktor der ersten und der zweite und dritte Faktor der zweiten Zahl Primfaktoren sind.

(e) *"Pythagoräische Zahlen:"* Dies sind Tripel natürlicher Zahlen x, y, z, die die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

erfüllen. Hier gaben die Pythagoräer eine Formel:

$$x = m, \; y = \frac{m^2 - 1}{2}, \; z = \frac{m^2 + 1}{2}$$

mit ungeradem m. Auf Euklid geht dann der folgende Satz zurück, der alle *primitiven pythagoräischen Tripel* x, y, z ("primitiv" heißt, dass die Zahlen x, y, z teilerfremd sind) und somit alle pythagoräischen Tripel beschreibt:

Satz: (Euklid, Elemente X, § 28) *Die primitiven pythagoräischen Tripel* (x, y, z) *mit geradem* y *sind durch folgende Parameterdarstellung*

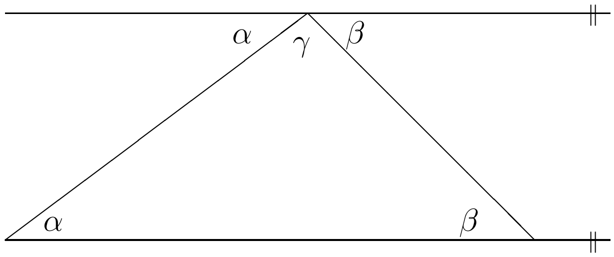
$$x = a^2 - b^2, \ y = 2ab, \ z = a^2 + b^2 \tag{2}$$

gegeben, mit teilerfremden natürlichen a, b, *sodass die Differenz* $a - b$ *positiv und ungerade ist.*

Die von den Pythagoräern gefundenen Zahlentripel werden durch (2) mit $a = k + 1$ und $b = k$, $k = 1, 2, \ldots$ erzeugt. Das Tripel $15, 8, 17$ z.B. wird jedoch nicht durch die pythagoräische Darstellung erfasst. Dagegen kannten bereits die Mesopothamier diese Darstellung (siehe Seite 14).

2. **Geometrie**

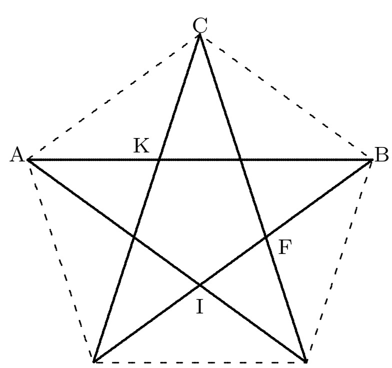
(a) *Winkelsumme im 3-Eck.*



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

In diesem Beweis werden der Gegenwinkelsatz (Thales) und Eigenschaften über parallele Geraden benötigt, die dann ausführlichst bei Euklid behandelt werden.

(b) *"Pentagramm"*, auch *"Drudenfuß"* genannt. Es ist ein fünfzackiger Stern, der im regulären 5-Eck durch dessen Diagonalen erzeugt wird. Dieser Stern war angeblich das Geheimzeichen der Pythagoräer und wurde ausführlichst auf seine geometrische Eigenschaften untersucht. Es stellt sich heraus, dass man diesen Stern leicht mit Zirkel und Lineal zeichnen kann.



$$\begin{aligned} \overline{AB} &= a \\ \overline{KB} &= x = \overline{BC} = \overline{AC} \\ \overline{AK} &= a - x \end{aligned}$$

Strahlensatz : $(\overline{KF} \parallel \overline{AI})$

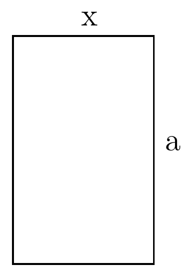
Die Dreiecke AIB und KFB sind ähnlich

$$\begin{aligned} \overline{AB} : \overline{KB} &= \overline{AI} : \overline{KF} \\ a : x &= x : a - x \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Diagonale $a = \overline{AB}$ zur Seite $x = \overline{AC}$ im Verhältnis des Goldenen Schnittes stehen.

(c) *Einschub:* ***Goldener Schnitt***: Zwei Strecken a und x stehen zueinander im Verhältnis des *"Goldenen Schnittes"*, wenn gilt, dass das Verhältnis der größeren a zur kleineren x, gleich ist zum Verhältnis der kleineren x zur Differenz $a - x$. Also:

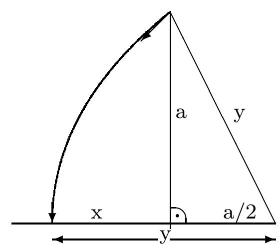
$$\begin{aligned} a : x &= x : (a - x) \\ x^2 &= a^2 - ax \\ x &= -\tfrac{a}{2} + \sqrt{a^2/4 + a^2} \\ x &= a \cdot \tfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \tfrac{\sqrt{5}-1}{2} &= 0.618033 \end{aligned}$$



Die Zahl $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618033$ heißt die *Verhältniszahl des Goldenen Schnittes.*

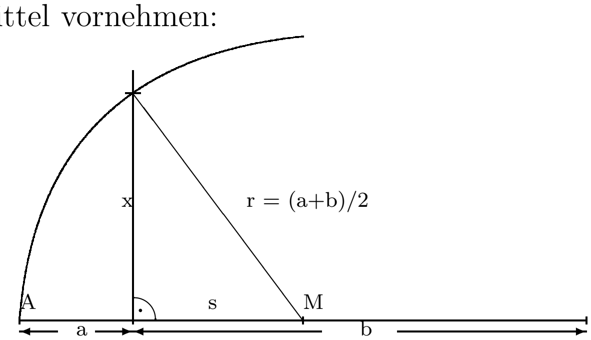
Eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist auf folgende Art leicht möglich:

1.
$$\begin{aligned} y^2 &= a^2 + a^2/4 \\ y &= \tfrac{\sqrt{5}}{2} \cdot a \end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned} y &= x + \tfrac{a}{2} \\ \Longrightarrow x &= y - \tfrac{a}{2} = a \cdot \tfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{aligned}$$



Die Strecke y wird aus dem Dreieck mit den Katheten a und $a/2$ ermittelt und dann mit dem Zirkel auf die waagrechte Gerade abgeschlagen. Somit wird x ermittelt. Damit kann man nun auch leicht das *Pentagramm* mit Zirkel und Lineal konstruieren.

(d) *Höhensatz und mittlere Proportionale:* Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b. Gesucht ist ein Quadrat mit gleicher Fläche. Nennt man die Seite des Quadrates x, dann muss das gesuchte x die Bedingung erfüllen:
$x = \sqrt{a \cdot b}$ *"Geometrisches Mittel"*
oder auch
$a : x = x : b$ *"Mittlere Proportionale"*.
Hier kann man eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal für x mit dem ***Höhensatz*** als Hilfsmittel vornehmen:



Der Kreis mit Mittelpunkt M durch A (Radius $r = \frac{a+b}{2}$) wird mit der senkrechten Gerade zum Schnitt gebracht, dies ergibt die Strecke x. Für diese gilt nun nach dem Höhensatz: $x^2 = a \cdot b$.

Beweis *des Höhensatzes:* In der Zeichnung wurde s mit $s = r - a$ eingeführt. Also ist $r - s = a$ und $r + s = b$.

Nun können wir für das 3-Eck mit den Seiten x, s und r den Satz von Pythagoras anwenden:

$$x^2 = r^2 - s^2 = (r - s)(r + s) = a \cdot b.$$

3. Nur kurz erwähnt sollen auch die Beiträge zur ***Musiktheorie*** und zur Astronomie bzw. Astrologie. In der Musiktheorie ist die *"pythagoräische Stimmung"* ein eingeprägter Fachbegriff. Pythagoras erkannte, angeblich durch Wahrnehmung der Töne beim Schlagen der Schmiede mit dem Hammer auf den Amboss und durch Experimente am "Monochord", dass sich wohlklingende Tonfolgen ("Intervalle") in ganzzahligen Verhältnissen messen lassen (Oktav 1 : 2, Quint 2 : 3, Quart 3 : 4), wobei diese Zahlen noch besondere Eigenschaften besitzen. Berühmte Musiker, wie z.B. Johann Joseph Fux (geb: 1660 Hirtenfeld / St.Marein - gest: 1741 Wien), aber auch Mathematiker wie Johannes Kepler und Leonhard Euler beschäftigten sich, aufbauend auf Pythagoras, mit den zahlenmäßigen Gesetzen in der Musiktheorie.

   Darüber hinaus findet man bei Mystikern immer wieder Bezugnahme auf die geheimnisvolle Welt der Pythagoräer. Eine Vermischung dieser beiden Themenkreise findet man zum Beispiel in der "Sphärenmusik" bei Johannes Kepler und aber auch bei den Antroposophen.

Wir haben einige Sätze angeführt, deren mathematischer Inhalt mit Pythagoras in Zusammenhang gebracht wird. Sicher hat er sie nicht alle selbst formuliert oder bewiesen. Dass sie ihm trotzdem zugeschrieben wurden, könnte in folgender Tatsache gelegen sein. Die Pythagoräer waren ja zunächst ein Geheimbund. Da sie mit der Zeit an Einfluss verloren haben und auch in Geldnöte kamen (wie die Legende sagt, durch die Schuld eines der Ihrigen, siehe [24]), haben die Pythagoräer beschlossen, mit der Mathematik, die damals "Geometrie"genannt wurde, Geld zu verdienen. Und diese Geometrie wurde genannt: *"Überlieferung des Pythagoras"*, ein zugkräftiger Titel für einen Bestseller.

2.1.3 Weitere Mathematiker der Ionischen Periode

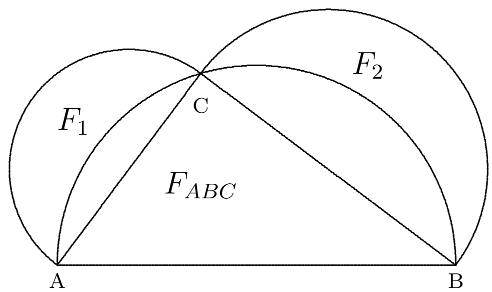
Wir führen hier nur einige wenige der vielen auch für die Mathematik bedeutenden *Sophisten* und *Philosophen* stellvertretend an.

2.1.3.1 Demokrit(os) von Abdera, $\sim$ 460– $\sim$ 371 **v.u.Z..** Er ist ein weiterer Schrittmacher in der Herausbildung der Wissenschaft, insbesondere bekannt durch seine *"materialistisch orientierte Atomtheorie"*, die dann später durch Platon und seine Anhänger geächtet wurde, wiewohl sie bis in heutige Zeiten nachwirkt (α-$\tau o \mu o \zeta$ = *unteilbar*). Es sind von seinen vielen Schriften über Natur, Musik, Ethik, bildende Kunst, Architektur, Astronomie und Mathematik meist nur deren Titel bekannt. Insbesonders:

"Über die Berührung von Kreis und Kugel", "Über Geometrie" und *"Über Ausbreitungen"*, welche Abbildungen der Kugeloberfläche auf die Ebene beschreibt. Es wurden von ihm erstmals die Volumina von allgemeinen Pyramiden und Kegeln richtig angegeben, wenn auch strenge Beweise erst durch Eudoxos (siehe Seite 37) und Archimedes erbracht wurden.

2.1.3.2 Hippokrates von Chios, ~ 440 v.u.Z.

(Nicht zu verwechseln mit dem Mediziner Hippokrates von Kos, $\sim 460- \sim 371$ v.u.Z.). Hippokrates von Chios war wohl der berühmteste Geometer des 5. Jhdts. Er konnte das regelmäßige 6-Eck, den Umkreis um ein 3-Eck u.a.m konstruieren. Weiters kennen wir die sogenannten "Möndchen des Hippokrates". Diese sind Beispiele einer Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras.



$F_{ABC} = F_1 + F_2.$

Die Summe der Flächen der beiden Möndchen ist gleich der Summe des Dreieckes ABC.

Immerhin ist es Hippokrates gelungen, damit erstmals die Quadratur von krummlinig berandeten Flächen durchzuführen.

Weiters ist Hippokrates bekannt durch seine Beiträge im Zusammenhang mit den Problemen der Quadratur des Kreises und der Würfelverdoppelung (siehe weiter unten). Darüber hinaus stammt wohl von Hippokrates eine erste zusammenfassende Darstellung der Geometrie unter dem Titel *"Elemente"*, und zwar nach dem seitdem klassischen Schema: *Voraussetzung, Satz, Beweis.* Doch sind diese Elemente durch die nachfolgenden ausführlichen "Elemente" von Euklid verdrängt worden, wobei aber zu vermuten ist, dass speziell die Bücher I, II, III und IV von Euklids Elementen sich auf die Vorlage von Hippokrates stützen.

2.1.4 Inkommensurabilität - Die Krise

Kommen wir noch einmal auf die Pythagoräer zurück. Schon in der Frühzeit kannten sie bereits *Würfel, Tetraeder, Dodekaeder* und möglicherweise auch schon die anderen der 5 *"regulären Polyeder"* , *Oktaeder und Ikosaeder.* Regelmäßige 5−Ecke und das Dodekaeder, also der durch 12 regelmäßige 5-Ecke begrenzte Körper kommt in der Natur in Pflanzen und Kristallen vor. Und das regelmäßige 5-Eck, das Pentagramm wurde ja von den Pythagoräern als Ordenszeichen geführt und daher auch besonders gründlich untersucht.

Erinnern wir uns daran, dass die Pythagräer der Überzeugung waren, dass die Gesetzmäßigkeiten der Welt durch die Harmonie der Zahlen bestimmt sei. *"Alles ist Zahl!"* war ihr Leitspruch. Danach besteht die Erkenntnis und Interpretation der Welt als Ganzes und der Mathematik insbesondere auf der Begründung auf ganzen Zahlen und Verhältnissen von ganzen Zahlen (wie man es damals etwa in der Musik erkannte).

Nun hatte man als mathematische Objekte einerseits die *Zahlen* (d.h. die heute so genannten *natürlichen Zahlen*) und andererseits *geometrische Objekte*, etwa Strecken, Flächen und Körper, die *gemessen werden mussten*, also deren Verhältnis zu einer Einheitsstrecke, Fläche oder Körper in ein bestimmtes Verhältnis gebracht werden mussten. Man war also nun als echter Pythagoräer der Meinung, dass die Welt *kommensurabel* aufgebaut war.

2.1.4.1 Kommensurabilität. Die Eigenschaft *kommensurabel* und deren Gegenteil *inkommensurabel* soll nun etwas genauer beschrieben werden.

Definition: *Zwei Größen (also Strecken, Flächen, Körper) a und b heißen* ***kommensurabel****, wenn es eine Größe d gibt und natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$, mit*

$$a = md \quad \textit{und} \quad b = nd.$$

Man sagte: "a und b werden durch eine gemeinsamme Größe derselben Art gemessen."

Wenn wir uns heute die entsprechenden Größen a und b als positive reelle Zahlen dargestellt denken, dann heißt die Kommensurabilität nichts anderes, als dass das Verhältnis (d.h. der Bruch $\frac{a}{b}$) eine *rationale Zahl* ist.

Vermutlich kannten schon die Pythagoräer das

Verfahren der Wechselwegnahme: *Man ziehe die kleinere Größe, etwa b von der größeren a ab. Mit den beiden Größen b und $a - b$ verfahre man so weiter. Wird einmal die Differenz gleich null, dann bricht das Verfahren ab. Die Größen a und b sind genau dann kommensurabel, wenn das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht.*

Wir wollen uns nun die Größen a und b durch Strecken vorstellen mit $a \geq b$. Dann zieht man im ersten Schritt von a die Strecke b ab, diese sei mit $a - b$ bezeichnet. Ist $a - b > b$, dann zieht man von $a - b$ wieder die kleinere b ab und erhält $a - 2b$. Dies macht man solange, bis für eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gilt: $0 \leq a - kb < b$. Dann führt man das Verfahren mit dem Streckenpaar b und $c := a - kb$ weiter. Das heißt wir haben das Verfahren der Wechselwegnahme in Schritte aufgeteilt:

Zu je zwei Strecken $a \geq b$ existiert eine nichtnegative Zahl k und eine Strecke $c < b$ (c kann auch die Länge null haben) mit $a - kb = c$. Dies ist sozusagen die "geometrische Form des Satzes von der Division mit Rest."

Man kann damit das Verfahren der Wechselwegnahme als *"geometrische Form des euklidischen Algorithmus"* bezeichnen. Mit $a_1 := a \geq b_1 := b$ erhalten wir schrittweise:

$$\begin{array}{lcll} a_1 & = & k_1 a_2 + a_3 & 0 < a_3 < a_2 \\ a_2 & = & k_2 a_3 + a_4 & 0 < a_4 < a_3 \\ & & \cdots & \\ a_i & = & k_i a_{i+1} + a_{i+2} & 0 < a_{i+2} < a_{i+1} \\ a_{i+1} & = & k_{i+1} a_{i+2} + a_{i+3} & 0 \leq a_{i+3} < a_{i+2} \end{array} \tag{3}$$

Wenn nun dieses Verfahren "abbricht", also etwa $a_{i+3} = 0$ ist und somit $d := a_{i+2}$ eine von 0 verschiedene Strecke ist, dann haben wir:

$$\begin{array}{lcl} a_{i+1} & = & k_{i+1} d \\ a_i & = & k_i k_{i+1} d + d = c_i d \\ & \cdots & \text{und rekursiv} \\ a_2 & = & c_2 d \\ a_1 & = & c_1 d \end{array}$$

mit geeigneten natürlichen Zahlen $c_1, c_2, \cdots, c_i$. Somit sind die Strecken a und b kommensurabel.

Seien umgekehrt nun die Strecken $a > b$ kommensurabel. Dann gibt es eine Strecke d und natürliche Zahlen $m > n$ mit $a = md$ und $b = nd$. Wir setzen nun $m_1 := m$ und $m_2 := n$ und führen den "zahlentheoretischen Euklidischen Algorithmus" durch:

$$\begin{array}{lcll} m_1 &=& k_1 m_2 + m_3 & 0 < m_3 < m_2 \\ m_2 &=& k_2 m_3 + m_4 & 0 < m_4 < m_3 \\ && \cdots & \\ m_i &=& k_i m_{i+1} + m_{i+2} & 0 < m_{i+2} < m_{i+1} \\ m_{i+1} &=& k_{i+1} m_{i+2} + m_{i+3} & 0 \le m_{i+3} < m_{i+2} \end{array}$$

Da es sich hier bei den $m_1 > m_2 > \cdots$ um nichtnegative ganze Zahlen handelt, muss eines der $m_j's$ einmal verschwinden, etwa $m_{i+3} = 0$. Setzen wir nun hier anstelle von $m_1, m_2, \cdots, m_{i+3}$ die Strecken $a_1 = m_1 d, a_2 = m_2 d, \cdots, a_{i+3} = m_{i+3} d$, dann erhalten wir das Schema (3) mit verschwindendem a_{i+3}. Das Verfahren der Wechselwegnahme bricht also ab.

Damit haben wir bewiesen:

Satz: *Zwei Strecken sind genau dann kommensurabel, wenn das Verfahren der Wechselwegnahme mit diesen Strecken nach endlich vielen Schritten abbricht.*

2.1.4.2 Inkommensurabilität. Im Laufe der Zeit zeigte es sich, dass es auch *inkommensurable Größen* gibt. Wann genau solche Beispiele gefunden wurde, ist nicht bekannt. Sicher jedoch entdeckten bereits die Pythagoräer inkommensurable Größen.

Das populärste Beispiel ist das Verhältnis zwischen der Seite s und der Diagonale d eines Quadrates. Es gilt: *d und s sind inkommensurabel!*

1. Beweis: *(Zahlentheoretischer Beweis nach Euklid)* Wir nehmen an, dass d und s kommensurabel sind. Danach gibt es eine Teilstrecke c und $m, n \in \mathbb{N}$, sodass $d = mc$ und $s = nc$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass nicht beide, m und n gerade sind (etwas nachdenken). Somit gilt nach dem Satz von Pythagoras: $s^2 + s^2 = d^2$, also

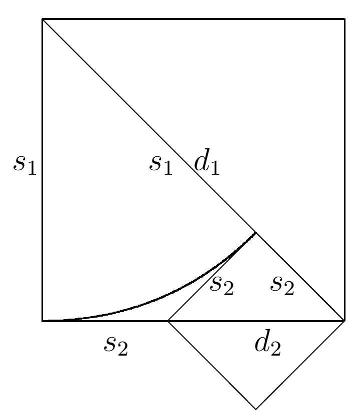
$$2n^2c^2 = m^2c^2,$$

und somit $2n^2 = m^2$. Daher ist m gerade, etwa von der Form $m = 2m'$. Daraus folgt $n^2 = 2(m')^2$, also ist auch n gerade, im Widerspruch zur Annahme.

Dieser Beweis verwendet zahlentheoretische Eigenschaften, insbesondere die "Lehre von den geraden und ungeraden Zahlen."

2. Beweis: Dieser beruht auf der Methode der Wechselwegnahme.

$$\begin{array}{lcl} d_1 &=& d \text{ Diagonale} \\ s_1 &=& s \text{ Seitenlänge} \\ s_2 &=& d_1 - s_1 < s_1 \\ d_2 &=& s_1 - s_2 \end{array}$$



Damit haben wir nach 2-maliger Wechselwegnahme die Größen d_2 und s_2 erhalten, die wieder Diagonale und Seite eines kleineren Quadrates bilden. Die Methode der Wechselwegnahme besteht ja nun darin, mit dem Paar d_2 und s_2 weiterzufahren. Nach endlich vielen Schritten kann daher niemals eine der Größen null werden.

2.1.4.3 Das Pentagramm. Die Legende sagt, dass Hippasos von Metapont, (er lebte um 450 v.u.Z.) erstmals inkommensurable Größen fand, und zwar, wie man heute vermutet, am ***Pentagramm***. Dies ist durchaus möglich, denn es ist überliefert worden, dass Hippasos sich mit dem Dodekaeder (durch 12 regelmäßige 5-Ecke begrenzt) befasst hat. Und sicher war das regelm. 5-Eck ein interessantes Objekt. Weiters sagt die Legende dass, aufgrund seiner Entdeckung, der Pythagoräer Hippasos auf offenem Meer in das Wasser gestoßen wurde, um den Zorn der Götter zu besänftigen.

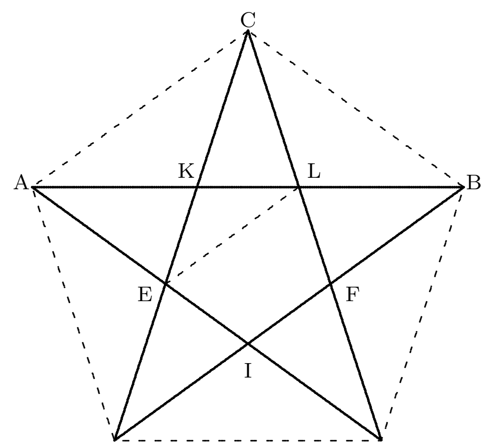
Hippasos hat also erkannt: *Die Seite und die Diagonale eines regelmäßigen 5-Eckes sind zueinander inkommensurabel.*

Der Beweis dieser Behauptung kann wieder mittels des Verfahrens der Wechselwegnahme erfolgen:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \overline{AB} \\
s_1 &= \overline{AC} = \overline{AL} \\
d_2 &= \overline{EL} = \overline{AE} \\
s_2 &= \overline{KL}
\end{aligned}
$$

und jetzt die Wechselwegnahme:

$$
\begin{aligned}
d_2 &= d_1 - s_1 < s_1 \\
s_2 &= s_1 - (d_1 - s_1)
\end{aligned}
$$



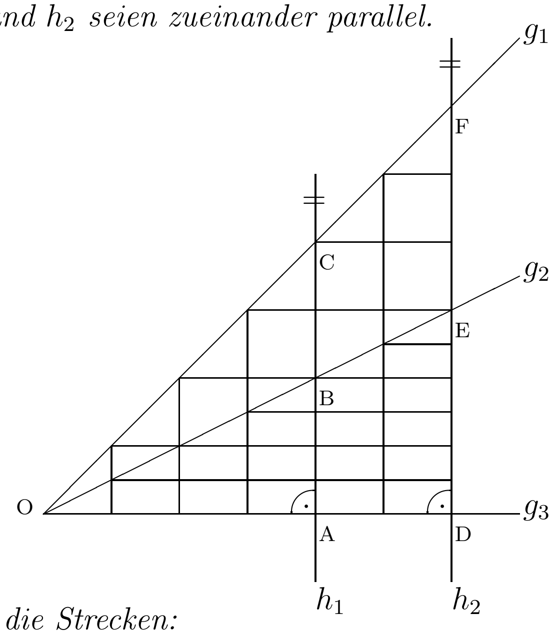
Die Diagonalen des äußeren regelmäßigen 5-Eckes erzeugen das kleinere regelmäßige 5-Eck KLFIE. Ganz schnell erhält man mittels der Wechselwegnahme die Diagonale und Seite des kleinen 5-Eckes. (Man siehe dazu Wußing [26], S. 57-58).

2.1.4.4 Die Krise. Durch die Tatsache, dass nun eben doch nicht alles durch (ganze) Zahlen meßbar ist, geriet die mathematische Welt, nicht nur die der Pythagoräer, in eine nicht unbeträchtliche Krise.

Die Bedeutung der Kommensurabilität lag darin begründet, dass man bei kommensurablen Größen leicht die Gültigkeit mathematischer Gesetze, z.B. der Flächenformel für Rechtecke oder die Gültigkeit des Strahlensatzes nachweisen kann.

2.1.4.5 Fläche eines Rechteckes: Sind Länge a und Breite b eines Rechteckes kommensurabel, etwa $a = md$ und $b = nd$ nach der Definition auf Seite 28, dann enthält dieses Rechteck gerade mn Quadrate der Länge d, deren Fläche ist also ein (ganzzahliges) Vielfaches eines Quadrates.

2.1.4.6 Strahlensatz: *Die Geraden g_1 und g_2 seien beliebig nicht parallel gegeben und die Geraden h_1 und h_2 seien zueinander parallel.*



Dann gilt für die Strecken:

$$\overline{OB} : \overline{OE} = \overline{OC} : \overline{OF} = \overline{BC} : \overline{EF} \tag{4}$$

Man beweist dies zunächst für den Spezialfall, wenn eine der Geraden senkrecht zu den Geraden $h_1 \parallel h_2$ steht, also in unserem Falle mit der Hilfsgerade g_3. Sind nun die Strecken $\overline{OA}, \overline{OD}, \overline{AB}$ und $\overline{DE}$ zueinander *kommensurabel*, dann kann man leicht durch Abzählen der kongruenten Dreiecke die Gültigkeit des Strahlensatzes für die Geraden g_2 und g_3, in diesem Falle:

$$\overline{OB} : \overline{OE} = \overline{OA} : \overline{OD} = \overline{AB} : \overline{DE}$$

nachweisen. Analog gilt der Strahlensatz für die Geraden g_1 und g_3:

$$\overline{OC} : \overline{OF} = \overline{OA} : \overline{OD} = \overline{AC} : \overline{DF}$$

Die Kombination der beiden letzten Identitäten liefert uns die erste Identität in (4).

Aus $\overline{OA} : \overline{OD} = \overline{AB} : \overline{DE} = (\overline{AB} + \overline{BC}) : (\overline{DE} + \overline{EF})$ folgt nach einer kleinen Zwischenrechnung die zweite Identität in (4).

Sind dagegen die Strecken nicht kommensurabel, dann ist man eigentlich am Ende seiner Weisheit angelangt. Die Krise war da. Entweder man begnügt sich mit weniger Rigorosität, oder man lässt sich etwas Neues einfallen.

Hier mussten neue Methoden erfunden werden, die Griechen halfen sich mit der *“geometrischen Algebra”*, der *“Proportionenlehre”* und *“Exhaustionsmethode”*.

2.2 Athenische Periode (∼ 450– ∼ 300 v.u.Z.)

2.2.0 Geschichtliche Vorbemerkungen

Ab ca. 500 v.u.Z. entwickelt sich in Athen ein Neuaufschwung in Politik und Wirtschaft, bedingt durch Reformen im politischen und wirtschaftlichen Leben. Athen wird zur politischen Großmacht, nachdem es siegreich aus dem Kampf gegen die Perser hervorgeht und bedeutende Bündnisse schließt. Gerade der Krieg gegen die Perser bewirkt einen Zusammenschluss zwischen den einzelnen ägäischen Küstenstädten der Ägäis (Delisch-Attischer Seebund, 478/477) und später auch eine friedliche Einigung unter den sich befehdenden Stadtstaaten (Sparta, Athen).

Und hier entsteht insbesondere in Athen eine kulturelle Hochblüte, die nur wenige Jahrzehnte dauern soll. Es entstehen die berühmten Meisterwerke in der Architektur *(Akropolis)*, Bildhauerei *(Praxiteles)*, Literatur *(Aristophanes, Sophokles, Euripides)* und Philosophie *(Sokrates, Platon, Aristoteles)*.

Besonders zu erwähnen ist Platon, 427 – 347 v.u.Z. Er war Schüler von Sokrates, begründete die "Akademie" in Athen (Philosophenschule im Haine des Heros (= Halbgott) Akademos). Seine Werke sind fast vollständig erhalten. Platon hatte großen Einfluss auf die Mathematiker, zumal er auch von den Mathematikern stark beeinflusst wurde. Er war Philosoph mit Kenntnissen in der Mathematik, aber er war auch ein *Ideologe*, indem er Vorschriften aufstellte über das, was in der Wisssenschaft erlaubt oder nicht erlaubt war. So verlangte er die *Reinheit* in den Methoden der Mathematik. Ihm wird zugeschrieben, dass als Konstruktionsprinzip in der Geometrie nur *"Zirkel und Lineal"* erlaubt waren, und zwar in idealer Form.

2.2.1 Die Klassischen Probleme der Antike

2.2.1.1 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Die Objekte der Geometrie in der Ebene sind in erster Linie die *Gerade* und der Kreis. Eine Gerade ist durch 2 verschiedene Punkte gegeben, man kann durch sie mittels eines Lineals leicht eine Gerade ziehen. Ein Kreis ist durch seinen Mittelpunkt und durch seinen Radius eindeutig bestimmt.

Das Konstruktionsprinzip mittels ***Zirkel und Lineal*** besteht nun in folgenden Vorschriften: Vorgegeben ist die Zeichenebene und darauf einige (mindestens zwei verschiedene) Punkte. Dann sind folgende Konstruktionen erlaubt:

1. Eine Gerade durch zwei gegebene (verschiedene) Punkte ziehen.
2. Den Schnittpunkt zweier nach 1.) konstruierten Geraden bestimmen.
3. Den Schnittpunkt einer durch 2 Punkte gegebenen Geraden mit einem Kreis mit einem gegebenen Mittelpunkt und gegebenem Radius (= Abstand zweier gegebener Punkte) bestimmen.
4. Den Schnittpunkt zweier wie in 3.) gegebener Kreise bestimmen.
5. Nach 2.)-4.) bestimmte Punkte sind gegebene Punkte.

Dabei werden folgende Idealisierungen angenommen: Die Ebene ist beliebig groß, die Geraden und Kreise und deren Schnittpunkte sind ganz exakt gezeichnet bzw. ermittelt. Nur Größen, die mit Zirkel und Lineal ermittelt werden können, wurden akzeptiert.

Als Beispiel eines Problems, das mittels des Konstruktionsprinzips gelöst werden sollte, ist das Problem der ***Würfelverdoppelung***: Es gibt dafür zwei historische Deutungen:

1. König Minos verlangte, dass man ein Grabmal, das man in Würfelform gebaut hatte und das zu klein geraten sei, verdoppeln solle, indem man die Seiten verdoppele.
2. Zu Platons Zeiten soll ein Orakelspruch die Verdoppelung des würfelförmigen Altares in Deli von bestehender Größe angeordnet haben, damit die Bevölkerung von der Pest befreit werde.

> Die Legende sagt auch noch darüberhinaus: Die delischen Architekten waren in großer Verlegenheit und wandten sich an Platon. Dieser sagte, Gott wolle keinen doppelt so großen Altar, sondern er wolle die Griechen tadeln, weil diese die Mathematik vernachlässigten und die Geometrie gering schätzten.

Mathematisch lässt sich das Problem ganz leicht formulieren. Hat der gegebene Würfel die Seitenlänge a, dann ist ein Würfel mit Seitenlänge x gesucht, wobei gelten muss:

$$x^3 = 2 \cdot a^3.$$

Dabei ist wesentlich, dass die gesuchte Länge x mittels "Zirkel und Lineal" ermittelt werden muss.

Hippokrates von Chios hat sich bereits mit diesem Problem befasst und es auf das Problem der *"fortgesetzten mittleren Proportionalen"* (siehe Seite 25) zurückgeführt:

$$a : x = x : y = y : b. \tag{5}$$

Zum Beispiel ist

$$1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8$$

solch eine fortgesetzte mittelere Proportionale. Aus (5) folgt:

$$ay = x^2 \quad \text{und} \quad ab = xy,$$

also

$$x^3 = a^2 b$$

und speziell mit $b = 2a$:

$$x^3 = 2 \cdot a^3.$$

Mit (5) hat Hippokrates aber das Problem auch geometrisch in den Griff bekommen. Wir müssen nur die Parabel $x^2 = ay$ mit der Hyperbel $xy = 2a^2$ zum Schnitt bringen. Dass dieser Schnittpunkt aber mit Zirkel und Lineal nicht ermittelbar ist, konnte erst im 19. Jhdt. exakt bewiesen werden.

Platon soll Eudoxos (Seite 37) kritisiert haben, weil dieser eine Lösung mit anderen Geräten als mit Zirkel und Lineal zu ermitteln versucht hat. Eudoxos war allerdings auf dem richtigen Weg!

Das Problem der Würfelverdoppelung war ein Katalysator in den mathematischen Wissenschaften. Es war eines der 3 berühmten Klassischen Probleme der Antike.

2.2.1.2 Die Klassischen Probleme der Antike, Diese mathematischen Probleme aus der Antike befassen sich mit Problemen von Konstrukionen mit Zirkel und Lineal. Sie lauten:

1. Das Delische Problem der ***Würfelverdoppelung***.
2. Die ***Quadratur des Kreises***: Zu gegebenem Kreis mit Radius r soll ein Quadrat mit Seitenlänge x konstruiert werden, das mit dem Kreis die Fläche gemeinsam hat. Also:

   $$x^2 = r^2 \pi.$$

   Die Legende sagt, dass Anaxagoras (von Klazomenae/Kleinasien, $\sim 500-425 v.u.Z.$) der später Lehrer und Berater des Staatsmannes Perikles war, wegen "Irrlehren" über Astronomie im Gefängnis war und sich dort zum Zeitvertreib dieses Problem gestellt habe.

3. Die ***Winkeldreiteilung***: Ein gegebener Winkel α soll durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Winkel geteilt werden. Hierzu ist mir keine Legende bekannt. Sicher hat es aber mit der Konstruktion von regulären n-Ecken zu tun. Diese ist für $n = 3, 4, 5, 6$ leicht zu machen. Jedoch läuft für $n = 9$ das Problem darauf hinaus, den Winkel von 120° in 3 Teile teilen.

Diese Probleme wurden immer wieder, auch von berühmten Mathematikern behandelt. Jedoch wurden sie erst im Laufe des 19. Jdts. einer endgültigen Klärung zugeführt. Es stellte sich heraus, dass alle 3 Probleme in der dort geforderten Form, d.h. mit Zirkel und Lineal, im allgemeinen **nicht** lösbar sind. Mathematisch basieren sie auf der Tatsache, dass die zu zeichnenden Streckenlängen als Zahlen Elemente einer "normalen" Körpererweiterung über dem gegebenen Grundkörper sein müssen, dessen Körpergrad eine Potenz von 2 ist. Dies ist in den einzelnen Problemen nicht gegeben:

1. Das Polynom $x^3 - 2$ ist in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel.
2. Die Zahl π ist nicht nur nicht rational (Lambert 1766), sondern auch transzendent (Lindemann 1882).
3. Ist α der zu drittelnde Winkel, dann muss $\cos\alpha/3$ die Gleichung

$$4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0$$

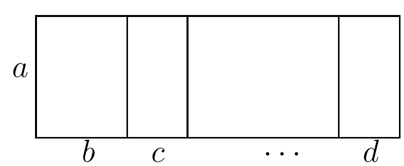
erfüllen (Herleitung mittels der Moivreschen Formeln). Wenn diese Gleichung irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ ist, also etwa für $\alpha = 120°$, d.h. $\cos\alpha = 1/2$, dann ist der Winkel $\alpha/3$ nicht (mit Zirkel und Lineal) konstruierbar. Somit ist das 9-Eck nicht konstruierbar.

2.2.1.3 Die geometrische Algebra. Quellen für die Geschichte der Mathematik der Athener Periode haben wir auf Seite 18 angegeben. Als bedeutendste Quelle gelten auch die *Elemente* von EUKLID. Dieser ist allerdngs schon der Alexandrinischen Periode zuzuordnen.

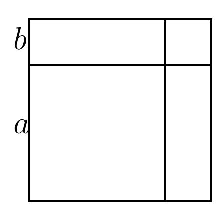
Wir finden in den Elementen Euklids viele Sätze, die eigentlich "algebraischer" Natur sind, in geometrischer Form behandelt. Zum Beispiel das Distributivgesetz ([6], II, § 1 und §2):

"Hat man zwei Strecken und teilt die eine von ihnen in beliebig viele Abschnitte, so ist das Rechteck aus den beiden Seiten den Rechtecken aus der ungeteilten Seite und allen einzelnen Abschnitten gleich."

$a(b + c + \cdots + d) = ab + ac + \cdots ad$:



Oder die Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:



"Teilt man eine Strecke wie es gerade trifft, so ist das Quadrat über die ganze Strecke den Quadraten über die Teilstrecken und zwei mal den Rechtecken aus den Teilabschnitten gleich."

Die Beweise für diese Formeln in geometrischer Form sind anhand der Zeichnungen sehr suggestiv nachzuvollziehen.

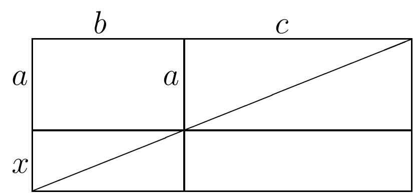
Es erhebt sich die Frage: **Warum diese geometrische Einkleidung?**

Arithmos ($\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$) heißt *Anzahl*, also *natürliche Zahl.* Die Entdeckung von inkommensurablen Größen bedeutet, dass man nicht alle Streckenverhältnisse durch Verhältnisse von (ganzen) Zahlen beschreiben kann. Dies bedeutet entweder eine Ausweitung des *Zahlbegriffes* (was nach langem Ringen exakt erst im Laufe des 19. Jahrhunderts durch berühmte Mathematiker wie etwa A.L. Cauchy, R. Dedekind u.a. gemacht wurde), oder eine Formulierung der Geometrischen Sätze in *"realen Größen"*, d.h. mittels *Strecken, Flächen* und *Volumina.* Dabei ist es unvorstellbar, etwa Strecken und Flächen zu vermischen, d.h. sie miteinander zu addieren oder voneinander abzuziehen, wie es die Babylonier ja bedenkenlos getan haben.

Beispiel: Eine *lineare Gleichung* der Form $c \cdot x = d$. Hier muss d eine Fläche sein, wenn c und das gesuchte x als Strecken vorausgesetzt wurden, also $d = a \cdot b$.

Dann liefert der Strahlensatz in der folgenden Zeichnung:

$c : a = b : x$
also: $c \cdot x = a \cdot b$.



Weiters wurden auch spezielle quadratische Gleichungen gelöst:

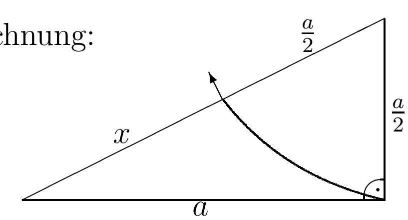
Beispiel: (Euklid: II. Buch, § 11) *Eine gegebene Strecke so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.*

Ist a die gegebene Strecke und sind $a - x$ und x die beiden anderen Strecken, dann wird gefordert, dass gilt: $a(a - x) = x^2$. Das ist die Forderung des *goldenen Schnittes* (siehe Seite 24). Die in Euklid angegeben Lösung ist aber äußerst kompliziert. Eine andere konstruktive Lösung, die auf der Methode der *quadratischen Ergänzung* beruht, ist die folgende:

Es ist die Gleichung $x^2 + ax = a^2$ zu lösen. Durch quadratische Ergänzung erhält man:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$$

Den Rest sieht man aus der Zeichnung:



Unter den Mathematikern Athens ragen insbesondere die folgenden heraus:

2.2.1.4 Theodoros von Kirene, $\sim 465\!-\! \sim 399$. Er behandelte *irrationale Zahlen* und gab angeblich Beweise für die Irrationalität von $\sqrt{n}$ für $n = 2, 3, 5, ..., 17$. In diesem Zusammenhang entwickelte er eine Spirale, die heute sogenannte *Spirale von Theodorus*, auch *Wurzelspirale* genannt.

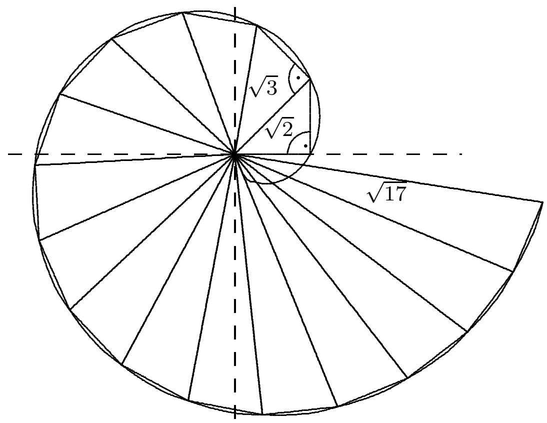
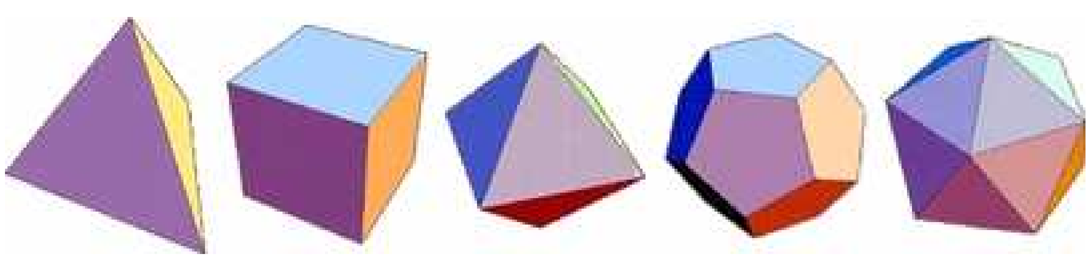


Abbildung 1: Die Spirale von Theodorus

Theodorus war auch angeblich Lehrer von Platon und insbesondere von:

2.2.1.5 Theaitetos von Athen, $\sim 417 - 368$. Von ihm stammt eine Art Klassifikation der irrationalen Zahlen, die er anwendet um die 5 regulären Polyeder, die sogenannten *"Platonischen Körper" Würfel, Tetraeder, Oktaeder, (Pentagon-)Dodekaeder, Ikosaeder* zu konstruieren. Sie werden deshalb so genannt, weil Platon sie in seinem Dialog *"Timaios"* angeführt hat. Ihnen ordnete er symbolsch jeweils eines der Elemente zu, wobei das Dodekaeder als Grundform für die Welt erscheint. Ein reguläres Polyeder ist dadurch gekennzeichnet, dass dessen Oberfläche durch *regelmäßige n-Ecke* (also gleichseitige 3-Ecke, Quadrate etc.) begrenzt wird. Es gibt, wie wir heute wissen, 5 **reguläre Polyeder:**

Platonische Körper:		
Tetraeder	4 Dreiecke	Feuer
Würfel	6 Quadrate	Erde
Oktaeder	8 Dreiecke	Luft
Dodekaeder	12 Fünfecke	Welt
Ikosaeder	20 Dreiecke	Wasser



Den Beweis dafür, dass es nur 5 platonische Körper gibt, hat angeblich schon Theaitetos erbracht, man findet ihn im XIII. Buch der Elemente von Euklid.

2.2.1.6 Eudoxos von Knidos, $\sim 408 - 355$**.** Er war Mathematiker, Arzt und Astronom, aber auch ein ausgezeichneter Redner, Philosoph und Geograph. Er studierte in Tarent und Sizilien und dann in Athen (u.a. bei Platon). Dann gründete er eine eigene Schule in Knidos (Kleinasien), seiner Vaterstadt. Von ihm stammt ein raffiniertes geozentrisches Planetensystem und er soll auch ein Astrolabium konstruiert haben.

Wir kennen heute den in der Literatur nach ihm benannten

Satz von Eudoxos: *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft:*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Wir werden weiter unten noch einmal darauf zurückkommen.

Als bedeutendste Errungenschaften dieser Zeit für die Mathematik sind wohl die *Proportionenlehre* und die *Exhaustionsmethode* zu werten. Die geschichtliche Forschung ist der Ansicht, dass beide im wesentlichen auf Eudoxos zurückgehen.

2.2.1.7 Die Proportionenlehre. Eudoxos schuf eine *Größenlehre*, sozusagen als Ersatz für eine Theorie der reellen Zahlen, die es ermöglichte, auch inkommensurable Paare von Größen, also Größen, deren Verhältnis nicht eine rationale sondern eine irrationale Zahl ist, zu erfassen.

Zwei Größen a und b (Strecken etc.) *"stehen in Proportion"*, wenn sie von gleicher Art sind, also beide Strecken oder Flächen oder Volumina darstellen.

Sind diese kommensurabel, also werden durch eine gemeinsame von null verschiedene Strecke (etc.), etwa d gemessen, dann kann man das Verhältnis ihrer Längen durch den Bruch zweier rationalen Zahlen angeben; wenn also $a = md$ und $b = nd$ ist, $(m, n \in \mathbb{N})$ dann könnte man deren Verhältnis mit $m : n$ angeben, unabhängig davon, wie groß d ist. Oder anders ausgedrückt, b ist ein $\frac{m}{n}$-tel der Größe von a.

Sind jedoch die beiden Strecken nicht kommensurabel dann ist das Verhältnis der Längen, so wie wir es heute verstehen, eine *irrationale Zahl*, also etwas, was über den damaligen Zahlenbegriff weit hinaus ging. Die Griechen machten einen Umweg um diesen neu zu erschaffenden Zahlbegriff. Sie führten einfach einen neuen Größenbegriff, die ***Proportion*** ein. Eine Proportion ist einfach ein *Paar von realen Größen*, etwa Strecken a, b; deren *"Proportion"* oder *"Verhältnis"* wird mit $a : b$ bezeichnet. Wir können uns heute dafür immer eine nichtnegative, meist sogar positive *reelle Zahl* dafür denken. Jetzt muss man definieren, wie man damit umzugehen hat. Was bedeutet, dass zwei Paare von Größen dasselbe Verhältnis haben:

"Man sagt, dass Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind. … Die dasselbe Verhältnis habenden Größen sollen in Proportion stehend heißen."

In unserer Formelschreibweise kann man dies so formulieren:

Definition: (Gleichheit von Proportionen). *Für die Proportion von Größen a, b, c, d gelte:*

$$a : b = c : d \;:\Longleftrightarrow\; \forall m, n \in \mathbb{N} : \quad \begin{array}{lcl} na > mb & \Rightarrow & nc > md \\ na = mb & \Rightarrow & nc = md \\ na < mb & \Rightarrow & nc < md \end{array}$$

Bemerkung: a.: Die Größen a, b, c, d sind immer größer als 0 vorausgesetzt (siehe dazu Seite 39 den Hinweis auf Euklid V. Definition 4) und sie brauchen nicht kommensurabel zu sein.

b.: Ist $a : b = c : d$, dann geschieht bei der Wechselwegnahme einerseits zwischen a und b desselbe, wie bei der Wechselwegnahme zwischen c und d.

Um nun Proportionen miteinander vergleichen zu können, führt man noch eine weitere Definition ein.

"Wenn von der Gleichvielfachen das Vielfache der ersten Größe das Vielfache der zweiten übertrifft, aber das Vielfache der dritten das Vielfache der vierten nicht übertrifft, so sagt man, dass die erste Größe zur zweiten ein größeres Verhältnis hat als die dritte zur vierten. Also:

Definition: (Vergleich von Proportionen)

$$a : b > c : d \iff \exists m, n \in \mathbb{N} \;\; mit \;\; ma > nb \;\; aber\ nicht \;\; mc > nd.$$

Damit kann man nun einfaches "Bruchrechnen" durchführen, z.B.:

1. aus $a : b = c : d$ folgt: $b : a = d : c$, $(a + b) : b = (c + d) : d$
2. $a > c \Longrightarrow a : d > c : d$
3. $a : b = c : d \Longrightarrow a : c = b : d$ (Vertauschung der mittleren Glieder)

Beweis der Behauptung $a : b = c : d \Longrightarrow (a + b) : b = (c + d) : d$:
Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und es sei weiters $n(a + b) > mb$. Zu zeigen ist: $n(c + d) > md$.

Es ist also zunächst $n(a + b) = na + nb > mb$

1.Fall: $n < m$: Damit gilt $na > (m - n)b$ und somit wegen $a : b = c : d$: $nc > (m - n)d$, also: $n(c + d) > md$.

2. Fall: $n \geq m$: Hier gilt trivialerweise $nc + nd > md$.

Analog beweist man auch die zweite und dritte Zeile in den Bedingungen der Definition für die Gleichheit von Proportionen. □

Aus dem Beweis ersieht man auch leicht, dass sogar die stärkere Aussage gilt:

$$a : b = c : d \iff (a + b) : b = (c + d) : d. \tag{6}$$

Diese haben wir im Beweis des allgemeinen Strahlensatzes (Seite 31) verwendet.

Es sei hier auch vermerkt, dass (6) auch im V. Buch von Euklid [6], § 17 und § 18 steht:

§ 17 *“Stehen Größen verbunden in Proportion, so müssen sie auch getrennt in Proportion stehen.”*
§ 18 *“Stehen Größen getrennt in Proportion, so müssen sie auch verbunden in Proportion stehen.”*

Die Beweise dazu werden dort allerdings mit der Exhaustionsmethode durchgeführt. Sie sind sehr kompliziert und nehmen jeweils eine gedruckte Seite ein. Hier kann man deutlich den Vorteil unserer Formelschreibweise und der modernen Darstellung der reellen Zahlen sehen. Damit können die Beweise von jedem Gymnasiasten in wenigen Zeilen erledigt werden.

Auf dieser logisch abgesicherten Basis der Proportionenlehre konnte sich die Mathematik während der nachfolgenden Periode zu einer staunenswerten Höhe entwickeln. Allerdings war es noch ein weiter Weg zu den irrationalen Zahlen.

Auf dieser Grundlage hat dann auch Eudoxos eine Methode eingeführt, um Formeln für Inhalt und Volumina von krummlinig berandeten Flächen bzw. Körpern herzuleiten, bzw. zu beweisen. Seine Methode, wurde im Laufe des 17. Jhdts., als man sich mehr mit infinitesimalen Methoden zur Inhaltsmessung befasste, mit dem etwas unglücklich gewählten Wort *“Exhaustionsmethode”* versehen ([26]).

2.2.1.8 Die Exhaustionsmethode. Der Exhaustionsmethode (lat. exhaurire, ausschöpfen) liegt die Idee zu Grunde, etwa krummlinig berandete Flächen durch Ein- bzw. Umschreibung von Polygonzügen anzunähern. Allerdings muss man festsellen, dass diese Methode bei Eudoxos oder Euklid nur zum Beweisen von bereits bekannten Flächenformeln verwendet wurde. Der Methode von Eudoxos liegen zwei mathematische Prinzipien zu Grunde, die das Abschätzen von Zahlen (Größen) behandeln.

Zunächst das folgende Postulat (Axiom), das Eudoxos zugeschrieben wird: *“Die größere von zwei gegebenen Größen, sei es Linie, Fläche oder Körper, überragt die kleinere um eine Differenz, die genügend oft vervielfacht, jede der beiden gegebenen Größen übertrifft.”*

Also, ist $\varepsilon := a - b > 0$ gegeben, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n\varepsilon > \max\{a, b\}.$$

Bei Euklid [6] (V. Definition 4) findet man die noch einfachere Definition, die ein analoges Postulat beinhaltet:

“Dass sie ein **Verhältnis zueinander haben,** *sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können.”*

Mittels dieses Postulates kann man nun folgenden Satz (Euklid [6], X,§1.) beweisen: *“Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muss einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.”*

Also: Sei $a > b > 0$ gegeben. Dann erhält man $r_1 < a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$, $r_2 < r_1 - \frac{r_1}{2} = \frac{r_1}{2} < \frac{a}{4}$ usw.: $r_k < \frac{a}{2^k}$, wie man leicht durch Induktion beweist. Aus Euklid V. Def. 4 folgt, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $nb > a$. Ist nun k groß genug, so dass $2^k > n$ ist, dann ist auch $2^k b > a$. Für dieses k gilt nun

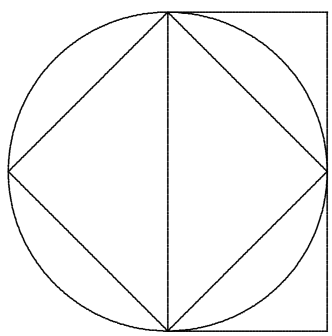
$$r_k < \frac{a}{2^k} < \frac{2^k b}{2^k} = b.$$

Als Beispiel in der Anwendung der Exhaustionsmethode führe ich den Beweis des *"Flächensatzes für Kreise"* an:
Satz: *Kreise verhalten sich so zueinander, wie die Quadrate über den Durchmessern.*

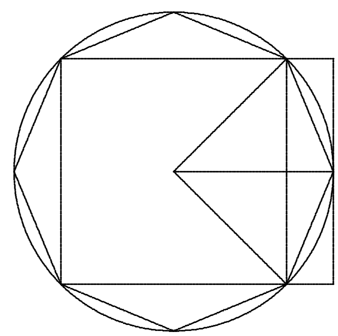
Beweis: Es seien F und f die Flächen mit den Durchmessern D und d. Wir nehmen an, dass es ein Paar solcher Kreise gibt, für die der Satz falsch ist, d.h. für die gilt:

$$F : f \neq D^2 : d^2.$$

Folglich existiert eine Größe φ mit $F : \varphi = D^2 : d^2$ und $\varphi \neq f$.
1. Fall: $\varphi < f$, also $0 < f - \varphi$. Wir schreiben nun den beiden Kreisen regelmäßige n-Ecke ein und bezeichnen deren Flächen mit F_n und f_n.



$f_4 > f/2$



$f_8 - f_4 > \frac{1}{2}(f - f_4)$

und allgemein:

(7) $$f_{2^{k+1}} - f_{2^k} > \frac{1}{2}(f - f_{2^k}).$$

Nun haben wir

$$f - f_{2^{k+1}} = f - f_{2^k} - (f_{2^{k+1}} - f_{2^k}),$$

das heißt man erhält $f - f_{2^{k+1}}$ dadurch, dass man von $f - f_{2^k}$ etwas abzieht, was wegen (7) größer als dessen Hällfte ist.

Wir können nun den Satz Euklid, X,§1. (siehe Seite 39) verwenden, bzw. selbst die Ungleichung $f - f_{2^{k+1}} < f/2^k$ nachweisen, und wir erhalten, dass für ein n gilt:

$$f - f_n < f - \varphi \quad \text{somit} \quad \underline{f_n > \varphi}.$$

Nun wissen wir dass für die regulären n-Ecke gilt (bei Euklid ist das ein eigener Satz):

$$F_n : f_n = D^2 : d^2,$$

daher

$$F : \varphi = F_n : f_n$$

und nach Vertauschung der mittleren Glieder:

$$F : F_n = \varphi : f_n.$$

Nun gilt: $F > F_n$ aber $\varphi < f_n$, im Widerspruch zur Definition der Gleichheit der Verhältnisse.
2. Fall: $\varphi > f$. Hier haben wir:

$$d^2 : D^2 = \varphi : F = f \cdot \varphi : f \cdot F = f : \Phi$$

mit $\Phi = F \cdot \frac{f}{\varphi} < F$. Jetzt können wir wieder Fall 1 mit vertauschten Kreisen anwenden. Wir haben es uns natürlich hier einfach gemacht, indem wir immer wieder moderne Formeln verwendet haben.

Damit ist aber auch die wohlbekannte Flächenformel für Kreise bewiesen. Denn, seien R und r die entsprechenden Radien der Kreise, dann gilt natürlich auch $F : f = R^2 : r^2$. Für $r = 1$ und $f = \pi$, die Fläche des Einheitskreises, erhalten wir $F : \pi = R^2 : 1$, also in unserer Schreibweise

$$F = R^2 \pi.$$

Bedeutung der Exhaustionsmethode. Hier wurde erstmals die Methode des *"indirekten"* Beweises verwendet, der dann in diesem Zusammenhang in die Logik Eingang gefunden hat. Weiters konnten mit dieser Methode mehrere mathematische Sätze exakt bewiesen werden (was auch vermutlich schon durch Eudoxos geschah), nämlich z.B. der Strahlensatz und Sätze über das Volumen von Pyramide, Kegel und Kugel. Hier blieb der Ansatz zu einer Integralrechnung aber schon vor dem Aufkeimen stecken. Von einem richtigen "Ausschöpfen" von Flächen und Volumina, durch beliebig kleine Normflächen, wie es dann etwa zu Beginn der Neuzeit durch Kepler und Cavalieri geschah, kann bei den Griechen, selbst bei dem großen Archimedes nicht die Rede sein.

2.3 Alexandrinische Periode (bis ~ 150 u.Z.)

Zunächst etwas allgemeine Geschichte: Der Makedonier Philipp II (Regierungszeit: 359 – 336 v.u.Z.) legt die Grundlage für die politische Großmacht der Makedonier, die unter Alexander III (der Große, 336 – 323) vergrößert wurde. Unter seinen Nachfolgern, den Ptolemäern (330 – 30 v.u.Z.), wird das *"Hellenistische Reich"* als Weltreich gefestigt. In diese Zeit fallen auch große kulturelle Leistungen (in Athen, Rhodos und anderen Städten). Neue Städte als Kulturzentren werden gegründet, insbesondere die Stadt **Alexandrien** ($\sim$ 331), die dann bis zum Tode Cleopatras (letzte Königin auf dem Territorium Ägyptens, $*69 - 30$ v.u.Z.) Hauptstadt eines relativ stabilen Reiches, des Ptolemäerreiches, wurde.

In Alexandrien gab es das **Museion** (Sitz der Musen, das sind die 7 Göttinnen der Künste). Dies war das erste vom Staat gegründete und auch finanzierte Lehr- und Forschungszentrum, mit Hörsälen, Arbeits- und Speiseräumen und einer großen Bibliothek. Hier soll Euklid "um 300 herum" gelehrt haben.

2.3.1 Die Elemente von Euklid (~ 300 v.u.Z.)

2.3.1.1 Euklid von Alexandrien ($\sim 380 - 300$) schien großes Ansehen genossen zu haben. Er soll es gewagt haben, dem König Ptolemaios ins Gesicht zu sagen, "dass es für Könige keinen besonderen Weg zur Mathematik gäbe." Eine weitere Anekdote: Ein Schüler fragte Euklid: "Was kann ich verdienen, wenn ich all diese Dinge lerne?" Darauf sagte Euklid zu seinem Sklaven: “Gib ihm 3 Obolen, der arme Kerl muss Geld verdienen mit dem, was er lernt.”

Euklid war sowohl Lehrer, als auch eigenständig arbeitender Mathematiker. So gibt es von ihm neben den *Elementen* noch eigenständige Schriften über geometrische Algebra, Algebra, Geometrie aber auch angewandten Mathematik (Optik, Perspektive, Astronomie), siehe [24], Seite 325 f. Van der Waerden schreibt allerdings auch ([24], S. 323), “dass Euklid bestimmt kein großer Mathematiker war.” Die wichtigsten und schwierigsten Teile der Elemente habe er von anderen Autoren, wie Theaitetos und Eudoxos übernommen. Diese stehen auf einem sehr hohen Niveau, während andere Teile ihnen weit unterlegen sind und dort Denkfehler und Ungereimtheiten vorkommen. Das Niveau des Euklid bewegt sich auf dem seines Vorbildes, er selbst ist eher Didaktiker, kein schöpferischer Mathematiker.

2.3.1.2 Die Elemente von Euklid bilden den Abschluss einer Reihe ähnlicher Werke (Hyppokrates u.a.), wie sie in den mathematischen Schulen als Standardlehrbücher verwendet wurden. Es ist in ihnen das gesamte mathematische Wissen der damaligen Zeit dargestellt.

Die *“Elemente”* [6] bestehen aus 13 Büchern. In späterer Zeit sind noch zwei weitere Bücher hinzugekommen. Die folgende Tabelle informiert über Inhalt und Ursprung der einzelnen Bücher der *Elemente von Euklid* (siehe [26]).

<table>
<tr><th>Buch</th><th></th><th>Inhalt</th><th>Ursprung</th></tr>
<tr><td>I</td><td rowspan="6">planimetrische Bücher</td><td>vom Punkt bis zum pythagoräischen Lehrsatz</td><td rowspan="4">Ionische Periode (Pythagoräer)</td></tr>
<tr><td>II</td><td>Geometrische Algebra</td></tr>
<tr><td>III</td><td>Kreislehre</td></tr>
<tr><td>IV</td><td>Ein- und umbeschriebene regelmäßige Vielecke</td></tr>
<tr><td>V</td><td>Größenlehre (Irrationalitäten)</td><td>Eudoxos</td></tr>
<tr><td>VI</td><td>Proportionenlehre (Planimetrie)</td><td>?</td></tr>
<tr><td>VII</td><td rowspan="3">zahlentheoretische Bücher</td><td>Teilbarkeitslehre, Primzahlen</td><td rowspan="3">Pythagoräer</td></tr>
<tr><td>VIII</td><td>Quadrat- und Kubikzahlen, geometrische Reihen</td></tr>
<tr><td>IX</td><td>Lehre von Gerade und Ungerade</td></tr>
<tr><td>X</td><td>Irrationalitäten</td><td>Klassen quadratischer Irrationalitäten, Flächenlegung</td><td>Theaitetos</td></tr>
<tr><td>XI</td><td rowspan="3">Stereometrische Bücher</td><td>Elementare Stereometrie</td><td>Ionische Periode</td></tr>
<tr><td>XII</td><td>Exhaustionsmethode: Pyramide, Kegel, Kugel</td><td>Eudoxos</td></tr>
<tr><td>XIII</td><td>Reguläre Polyeder</td><td>Theaitetos</td></tr>
</table>

Euklids *Elemente* waren zu allen Zeiten ein Bestseller. Sie zählen zu den Werken (wenn man von den heutigen Computerhandbüchern absieht) die nach der Bibel in die meisten Fremdsprachen übersetzt wurden. Über Jahrhunderte waren sie das Standardlehrbuch, nach dem Studenten Mathematik gelernt haben und angeblich waren sie noch im zwanzigsten Jahrhundert ein Bestandteil der Pflichtlektüre in englischen Colleges.

2.3.1.3 Die "Geometrischen Axiome" der Elemente von Euklid.

Die *Elemente von Euklid* folgen dem Schema: *Definitionen, Postulate, Axiome, Probleme mit Lösungen, Sätze, Hilfssätze und deren Beweise.* Beispiele:

- **Definitionen.**

  1. *Ein* **Punkt** *ist, was keine Teile hat,*
  2. *Eine* **Linie** *ist eine breitenlose Länge.*
  3. *Die Enden einer Linie sind Punkte.*

     ...

  10. *Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein* **Rechter***;*

      und die stehende gerade Linie heißt **senkrecht** *zu (***Lot** *auf) der, auf der sie steht.*

      ...

- **Postulate.**

  Gefordert soll sein:

  1. *Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann*
  2. *Dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann*
  3. *dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann*
  4. *Dass alle rechten Winkel einander gleich sind*
  5. *Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.*

- **Axiome.**

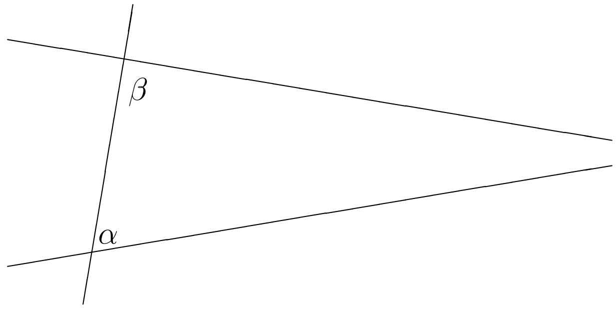
  1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich
  2. ...

- **Probleme mit Lösungen:**

§1 (A.1.) *Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.* Dann wird die Lösung mit Zirkel und Lineal angegeben, wobei immer die dabei verwendeten Definitionen, Postulate und Axiome angeführt werden.

...

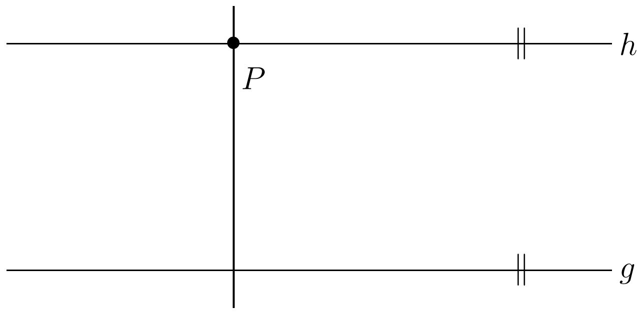
Unter den Postulaten ist das **5. Postulat** besonders herauszuheben:



$\alpha + \beta < 180°$

Aus ihm folgt nämlich das berühmte

Parallelenaxiom: *Zu je einer Geraden g und einem Punkt P existiert genau eine Gerade h die durch den Punkt P geht und zur Geraden g parallel ist.*



Es erhebt sich dabei die Frage: *Kann man dieses Parallelenaxiom auch ohne Verwendung des 5. Postulats* (das zum Parallelenaxiom gleichwertig ist) *aus den übrigen Postulaten folgern?* Die Antwortet lautet: Nein. Sie erfolgte aber erst im 19. Jhdt. unabhängig von:

- János Bolyai (1802−1860) aus Siebenbürgen. Sein Vater war mit Gauß befreundet und schickte die Arbeit des jungen Bolyai zu Gauß, um sein Urteil zu erfragen.
- Nikolai Ivanović Lobačevskij (1793−1856). Er war Professor an der Universität Kasan in Tatarien.

Beide Mathematiker gelten als Begründer der *"nichteuklidischen Geometrie"*. Sie zeigten durch Angabe eines axiomatischen Modells, dass das 5. Postulat bzw. das Parallelenaxiom unabhängig von den übrigen Postulaten ist. Das Verblüffende ist eben dabei, dass schon Euklid dies gewusst oder zumindest geahnt haben muss. Natürlich hat sein Axiomensystem viele Schwächen und auch Inkonsistenzen. Eine durchgehend exakte Axiomatik der Geometrie wurde nach langem Ringen erstmalig um 1890 durch David Hilbert (1862 − 1943) gegeben.

2.3.2 Archimedes von Syrakus (287 – 212 v.u.Z.)

Archimedes, wohl der größte Mathematiker und das größte naturwissenschaftliche Genie des Altertums, stammt aus Syrakus, wo er geboren ist und auch sein gewaltsames Ende fand. Er studierte vermutlich auch in Alexandrien, jedenfals pflegte er Kontakt mit den dortigen Gelehrten, denen er schriftlich seine mathematischen Entdeckungen mitteilte, allerdings ohne Beweise weil er, wie er selber schreibt, *"gerne jedem Mathematiker das*

Vergnügen gönnen möchte, es selber zu erfinden." Aber um seinen eingebildeten alexandrinischen Kollegen ein Bein zu stellen, fügte er hie und da auch falsche Lehrsätze hinzu, *"damit diejenigen, die behaupten, das alles selber entdeckt zu haben, ohne aber die Beweise hinzuzufügen, auch einmal hereinfallen, indem sie behaupten, etwas gefunden zu haben, was unmöglich ist"* ([24], S. 345).

Um die Person des Archimedes sind sehr viele Legenden und Anekdoten gerankt, die seine Bedeutung aber auch seine Popularität bezeugen.

So gibt es die Geschichte um den goldenen Weihkranz des König Hieron, dessen Goldgehalt Archimedes bestimmen sollte. Die entscheidende Idee der verschiedenen spezifischen Gewichte kam ihm im Bade (etwa durch den Auftrieb, den sein Körper im Wasser erfuhr); darauf soll er laut die Worte *"heureka!"* rufend splitternackt nach Hause gelaufen sein.

Ein anderes Mal solle er den missglückten Stapellauf eines Schiffes mittels einer technischen Vorrichtung (Flaschenzug oder Hebelvorrichtung) gerettet haben, und zwar so, dass eine Person diese Vorrichtung bedienen konnte. Der König ließ dieses Schiff selber zu Wasser und rief aus: *"Von diesem Tage an soll man Archimedes, wenn er etwas sagt, in allem glauben."* Bei einer ähnlichen Gelegenheit soll Archimedes gesagt haben: *"Gebt mir einen Ort wo ich stehen kann, und ich werde die Erde bewegen"*.

Weiters wird berichtet, dass Archimedes die Armee von Syrakus mit technischen Waffen versehen hat, sodass Syrakus lange dem kriegerischen Ansturm der Römer standhalten konnte. Für Archimedes waren aber diese mechanischen Erfindungen nur "Nebenprodukte einer spielerischen Geometrie."

Abbildung 2: Tod des ARCHIMEDES. Mosaik, wahrscheinlich aus der Schule des RAFFAEL. Kopie (oder Fälschung), die ursprünglich für ein authentisches römisches Werk gehalten worden ist. Verschiedene Elemente in der Rahmenverzierung (die Wasserhühner - porphyrions - in den vier Ecken und die Ranken) sind sehr gute Nachahmungen römischer Vorbilder (Städtische Galerie, Frankfurt am Main), Zitiert nach [24], Seite 350.

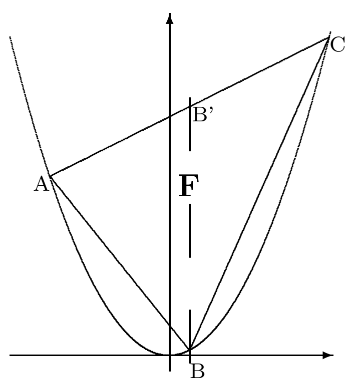
Erst nach langwieriger Belagerung ist Syrakus durch die Römer eingenommen worden. Bei der Plünderung von Syrakus im Jahre 212 v.u.Z. hat ein römischer Soldat, entgegen den

Anweisungen des römischen Feldherrn Marcellus den inzwischen 75 Jahre alten Archimedes getötet. Archimedes, der gerade in eine Figur vertieft war, die er in den Sand gemalt hatte[5], bat den Soldaten, angeblich mit den Worten *"Man störe meine Kreise nicht"*, zu warten. Dies soll den Soldaten so erzürnt haben, dass er ihn erschlug (so die Erzählung von Plutarch).

Marcellus hat dem Toten dann allerdings alle Ehre erwiesen und setzte ihm als Grabmal so, wie es Archimedes gewünscht hat, die Abbildung eines Zylinders mit einbeschriebener Kugel mit einer Inschrift über die größte Entdeckung von Archimedes, nämlich dass sich deren Volumen wie 3 zu 2 verhält.

2.3.2.1 Die mathematischen Leistungen des Archimedes sollen hier nur kurz angerissen werden. Neben seinen Leistungen in Physik und Astronomie hat er auch unter Verwendung der Exhaustionsmethode von Eudoxos u.a. folgende Themenkreise behandelt:

- Eine Abschätzung von π auf ein Tausendstel genau: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$. Dies im Zusammenhang mit dem Kreisumfang, indem er die Umfänge der ein- und umgeschriebenen regulären 96-Ecke (durch fortgesetzte Halbierung des Winkels von 120°) eines Kreises berechnete.
- Quadratur der Parabel. Die Fläche des Parabelsegments, bestimmt durch die Punkte $\overline{AC}$ wird durch die eines Dreieckes angegeben, siehe Abbildung 3.



$$B' = \frac{\overline{AC}}{2}$$

<u>Parabelfläche:</u>

$$\mathbf{F} = \tfrac{4}{3}\Delta ABC$$

Abbildung 3: Quadratur der Parabel

Dazu benötigte er:

- Die Summe der geometrischen Reihe $s = a + a/4 + a/16 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a}{4^i} = \frac{4}{3}a$ und zwar eigentlich nur die der endlichen Summe

$$\sum_{i=0}^{n} a/4^i + a/4^n \frac{1}{3} = \frac{4}{3}a,$$

die wiederum aus der Identität

$$4\,(a_1 + ... + a_n) = a_0 + ... + a_{n-1},$$

[5] Dazu ist zu erwähnen, dass die Griechen als Schreibmittel eine Sandfläche (Sandkasten) verwendet haben, um die Zwischenrechnungen niederzuschreiben.

mit $a_i = \frac{a}{4^i}$ folgt. Dieses Verfahren kann man auch für allgemeine geometrische Reihen mit $a_i = aq^i$, $q < 1$ anwenden.

- Formeln für den Rauminhalt von Kugel, Kegel, Zylinder, Rotationsparaboloid etc. mit Beweisen.
- Die sog. *Archimedischen Körper* oder fastreguläre Körper, das sind Körper, die durch reguläre n-Ecke begrenzt sind, wobei allerdings auch verschiedene zueinander nichtkongruente n-Ecke zugelassen sind.

2.3.2.2 Physikalische Werke von Archimedes. Bekannte Schriften sind u.a. *"Über schwimmende Körper"*, Schriften über Hebelgesetze und Schwerpunkte sind verlorengegangen. Weiters hat sich Archimedes mit der Konstruktion von Flaschenzügen, Wasserschrauben (Pumpen) u.a. beschäftigt.

Wie die Werke von Archimedes bis auf unsere zeit überliefert worden sind, schildert auf spannende Weise das Buch [19], "Der Kodex des Archimedes. Das berühmteste Palimpsest wird entschlüsselt."

2.3.3 Weitere Mathematiker der Alexandrinischen Periode:

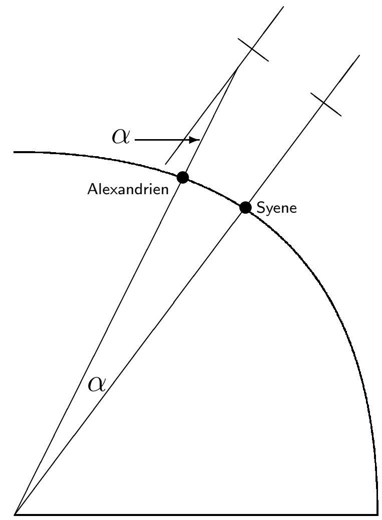
2.3.3.1 Aristarchos von Samos (~ 310– ~ 230). Er lebte vor der Zeit von Archimedes, aber dieser hat uns über ihn berichtet. Aristarchos ist dadurch bemerkenswert geworden, weil er die damals (auch von Archimedes) angefeindete These vertreten hat, dass sich die Erde auf einer Kreisbahn um die Sonne drehe (***Heliozentrisches System***). Um seine These zu untermauern, hat er sich mit den Abständen zwischen Erde und Mond bzw. Sonne befasst und eine besonders gute Annäherung des heute so genannten Sinus von $3°$ angegeben.

2.3.3.2 Erathostenes von Kyrene (~ 276– ~ 195 v.u.Z.). (Kyrene im jetzigen Libyen/Nordafrika) Er war Leiter der Bibliothek in Alexandrien. Bekannt sind von ihm:

- Eine Berechnung des Erdumfanges durch Bestimmung des Sonnenwinkels in Assuan und Alexandrien mit ca 46.000 km (exakt 40.0077), siehe Gericke [7], Seite 148f. Das Prinzip dieser Erdmessung beruht auf folgenden Tatsachen:
  1.) Alexadrien und Syene (Assuan) liegen auf dem selben Längenkreis (Meridian).
  2.) Ihre Entfernung zueinander beträgt 5000 Stadien (1 Stadie ist gleich 184, 98 m).
  3.) Zur Sommersonnenwende steht die Sonne senkrecht über Syene.
  4.) Zur Sommersonnenwende weicht die Richtung des Sonnenstrahles in Alexandrien um 1/50 des Vollkreises vom Senkrechten ab.
  5.) Also ist die Entfernung zwischen Alexandrien und Syene 1/50 des Erdumfanges.
- Das ***Sieb des Erathostenes***, eine Methode alle Primzahlen bis zu einer vorgegebenen Schranke, sagen wir 200 zu berechnen. Das Verfahren lautet: *Man schreibe alle Zahlen von* 2 *bis* 200 *auf. Dann streiche man alle echten Vielfachen von* 2 *aus, danach alle echten Vielfachen von* 3, *von* 5 *usw. Bei jedem Schritt ist jeweils die erste der nachfolgenden nichtgestrichenen Zahlen eine Primzahl, also nach* 5 *ist die nächste nichtgestrichene Zahl* 7, *nach Streichen aller* 7*−fachen folgt* 11 *als Primzahl und dann* 13. *Damit können wir schon aufhören, da alle nicht primen Zahlen kleiner oder gleich* 200 *einen echten Teiler kleiner als* $\sqrt{200} = 14.14...$ *besitzen müssen. Die übriggebliebenen d.h. nichtgestrichenen Zahlen sind Primzahlen.*
- Ein mechansches Gerät zur Lösung des Delischen Problems der Würfelverdoppelung.

Erdmessung des Erathostenes:

Die Sonne steht zur Sommersonnenwende über Syene senkrecht,
Sonnenabweichung in Alexandrien:
$\alpha = 2\pi/50$,
Entfernung zwischen Alexandrien und Syene:
5000 Stadien à 184.98 Meter,
Erdumfang: $50 \times 5000 \times 0.18498$ Kilometer.

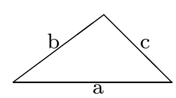


2.3.3.3 Appollonius von Perge ($\sim 262 - \sim 190$). Er studierte in Alexandrien und zog dann nach Pergamon (Tempel, Schule, Bibliothek). Bekannt geblieben ist er vor allem durch seine Theorie der Kegelschnitte (Ellipse, Parabel, Hyperbel) und durch astronomische Werke.

Dann schon gegen Ende:

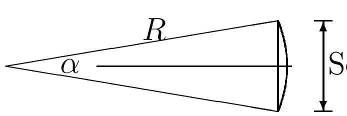
2.3.3.4 Heron v. Alexandrien (um 60 u.Z.). Von ihm stammt die ***Heronsche Formel*** für die Fläche eines Dreieckes:

$F = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}$ mit $s = \frac{a+b+c}{2}$



Diese Formel war bereits Archimedes bekannt. Heron gab einen exakten Beweis dafür, veröffentlicht in einer Formelsammlung namens *"Geometrica"*. Weiters veröffentlichte Heron Werke aus der *angewandten Geometrie* und *Mechanik*. Er konstruierte angeblich auch Wasseruhren, Visiereinrichtungen, Luftdruckmaschinen, Kriegsmaschinen und Automaten (Tiere, Vögel).

2.3.3.5 Ptolemaios v. Alexandrien ($\sim 85 - 165$ u.Z.). Anwendungen der Trigonometrie (Dreiecksrechnung) in der Astronomie. Als Berechnungsmethode verwendet man die *"Sehnenrechnung"*



$\mathrm{Se}(\alpha) = 2R \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Ptolemaios gab insbesondere eine Formel für $\mathrm{Se}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ an. Sein berühmtestes Werk ist *"Almagest"*, das ist arabisch und bedeutet *"Die große Zusammenfassung"*. Seine Werke kennen wir nämlich nur durch die arabischen Übersetzungen.

Ptolemaios rechnete im babylonischen *Sexagesimalsystem* und verwendete daher die Einteilung des Vollkreises in $360 = 6 \cdot 60$ Grade, 1 Grad = 60 Minuten, 1 Minute = 60 Sekunden.

2.3.3.6 Diophantos von Alexandrien (um 250 u.Z.). Diophant vertritt mehr die arithmetische Seite der griechischen Mathematik. Sein Werk "ARITHMETIKA" gilt als erste große ausschließlich zahlentheoretische Fragen behandelnde Abhandlung. Er untersucht Gleichungen in einer und mehreren Unbestimmten, wobei nur Lösungen zugelassen sind, die sich durch rationale Zahlen darstellen lassen. Dies führt immer zu Gleichungen mit ganzzahligen Lösungen. Seine Arbeiten haben auf die Mathematiker zu Beginn der Neuzeit einen großen Einfluss ausgeübt. Ihm zu Ehren nennt man heute alle Gleichungen, bei denen "nur" ganzzahlige Lösungen zugelassen sind (ein wesentlich komplizierteres Problem!), ***diophantische Gleichungen***. Typische Beispiele dafür sind lineare diophantische Gleichungen etwa der Form

$$aX + bY = c, \quad a, b, c \in \mathbb{Z},$$

oder die pythagoräischen Tripel, siehe Seite 24.

Als der französische Jurist und Mathematikamateur PIERRE FERMAT (1601-1665) die Arithmetika von Diophantos durchstudierte, schrieb er an den Rand der Seite, auf der die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ (in Worten: ein gegebenes Quadrat soll in eine Summe zweier Quadrate zerlegt werden) angegeben war, folgende Bemerkung:

"Cubum in duos cubos aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos et generaliter nullam in infinitum, ultra quadratum, potestam in duas ejusdem nominis fas est dividere. Cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi, hanc marginis exiguitas non caperet."

Damit wurde das niedergeschrieben, was man heute die ***Fermatsche Vermutung*** (oder auch den großen Fermatschen Satz, im Gegenspiel zum "kleinen Fermatschen Satz") nennt. Nachdem also der Platz auf dem Rand des Buches zu klein war, um den wunderbaren Beweis, den Fermat gefunden hat, zu fassen und Fermat auch später keine Gelegenheit mehr wahrgenommen hat, diesen Beweis aufzuschreiben, haben Generationen von Mathematikern mehr oder weniger erfolglos daran gearbeitet, die Vermutung zu beweisen – oder zu widerlegen. Mehr davon später auf Seite 96. Hier soll nur gesagt werden, dass die Beschäftigung mit dieser Fermatschen Vermutung zu vielen neuen mathematischen Erkenntnissen und Theorien (z.B. Idealtheorie) führte.

2.3.3.7 Pappos (Pappus) von Alexandrien (um 320 u.Z.). Er war Mathematiker, Astronom und Geograph. Sein Hauptwerk sind die *"Collectiones"* (Sammlung) als historische Quelle über Kurven, Kegelschnitte, reguläre Körper u.a.). Darüber hinaus gibt es auch eigene Sätze:

- **Satz von Pappos:** *Die Schnittpunkte der Diagonalen eines 6-Eckes, von dem je 3 auf einer Geraden liegen, liegen ebenfalls auf einer Geraden.* Dieser Satz hat sich nach mehr als 1.500 Jahren als bedeutend für die Grundlagen der Geometrie erwiesen.
- **Regel von Guldin-Pappos:** Diese liefern Formeln über Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern, siehe Seite 94.

Die Blüte der alexandrischen Schule neigte sich dem Ende zu. Nach Pappos sind nur noch zwei Persönlichkeiten hervorgetreten: THEON VON ALEXANDRIEN und seine Tochter HYPATHIA.

2.3.3.8 Hypatia ($\sim 370 - 418$ u.Z.). Sie ist schon deswegen erwähnenswert, weil sie eine der wenigen bekannten und beachteten Frauen in der Mathematik war. Sie war eine gelehrte und angesehene Wissenschafterin und schrieb Kommentare zu Diophant, Appollonius und Ptolemaios, die aber alle verloren sind. Sie hatte auch politschen Einfluss. Dieser wurde ihr zum Verhängnis. Sie starb eines gewaltsamen Todes.

Nach Hypatia war es aus mit der alexandrinischen Mathematik. Die einzige übriggebliebene Bibliothek (der meiste Teil wurde bei der Eroberung von Alexandrien durch die Römer bereits im Jahre 47 v.u.Z. verbrannt) war schon im 392 u.Z., und zwar auf Geheiß eines Herrschers, der sich Theodosius der "Grosse" nennen ließ, ausgeplündert und zerstört worden.

2.4 Niedergang der griechischen Mathematik

Die griechische Mathematik hat wohl um 200 v.u.Z. den Höhepunkt überschritten. Nach v.d. Waerden ist der letzte wirklich große Mathematiker Appollononius, ich würde auch noch Pappos dazu zählen wollen.

Trotzdem schien der Niedergang der griechischen Mathematik vorprogrammiert; einerseits durch den schwindenden politischen und wirtschaftlichen Einfluss der Griechen und der damit erfolgten Besetzung durch die Römer, die wohl an den bildnerischen Künsten aber nicht an der Mathematik der Griechen an sich Interesse hatten. Andererseits stand sich die griechische Mathematik selbst im Wege. Die Zeit war offensichtlich reif, um zu erkennen, dass der Zahlbegriff (der ganzen bzw. rationalen Zahlen) nicht ausreicht, aber noch nicht reif genug, eine exakte Theorie der Zahlen zu erbringen. Der Begriff der Proportionen war zu geometrisch und schwerfällig. Vor allem war er einem nicht in den mathematischen Wissenschaften Gelehrten unverständlich und deren Notwendigkeit nicht einsichtig. Es gereicht der griechischen Mathematik zur Ehre, dass sie sich über die Schwierigkeiten im Zahlbegriff nicht hinweggemogelt hat. Allerdings bedarf diese Art der Mathematik große Schulen, in denen das Wissen mündlich übermittelt werden soll, um deren Sinn zu verstehen. Pappos und Proclos haben weitscheifige Kommentare geschrieben. Diese wurden allerdings lange mit Unverstand gelesen. Erst mit Beginn der Neuzeit (Renaissance) wurde weiter auf der griechischen Mathematik aufgebaut.

Jedoch haben die Araber, wie wir sehen werden, in der Fortsetzung dann dadurch, dass sie sich nicht um diese logisch-grundlagentheoretischen Probleme gekümmert haben, sozusagen zunächst einmal einen Schritt zurückgegangen sind, wesentliche Fortschritte vor allem in der Algebra erzielt.

3 Länder des nahen, mittleren und fernen Ostens

3.0 Vorbemerkungen

Nach dem Zerfall der Antike kann man von einem Untergang der Mathematik im europäischen Raum sprechen. Dagegen entwickelte sich die Mathematik in den Ländern des nahen und fernen Ostens weiter. Im Vergleich zur Mathematik des christlichen Europas war bis in das 13. und 14. Jhdt. die Mathematik dort und insbesonders in den Ländern des Islams auf einem wesentlich höheren Niveau.

Dagegen gibt es eine Gewichtsverlagerung in Inhalt und Form. Geometrie ist nur Anwendung, es werden numerische Probleme und deren Näherungsverfahren behandelt. Die Methoden sind mehr algebraisch, auch sieht man kein Problem im Umgang mit den Zahlen. Gleichzeitig wird auch die Trigonometrie weiterentwickelt. Kurzum diese Mathematik war mehr den Bedürfnissen der Praktiker angepasst. Trotzdem wurde in der mathematischen Theorie die Exaktheit nicht vernachlässigt. Es werden für die Behauptungen auch Beweise als notwendig anerkannt und basierend auf logischen Schlüssen auch geliefert.

3.1 Mathematik in China

Erste Zeugnisse einer chinesischen Mathematik stammen aus ca. 2000 v.u.Z. und zwar im Zusammenhang mit Kalenderrechnungen.

Die *"Mathematik in neun Büchern"* (ca 220 v.u.Z) gibt Hinweise darauf, dass schon weit früher Mathematik in China betrieben worden ist. Diese Mathematik in neun Büchern

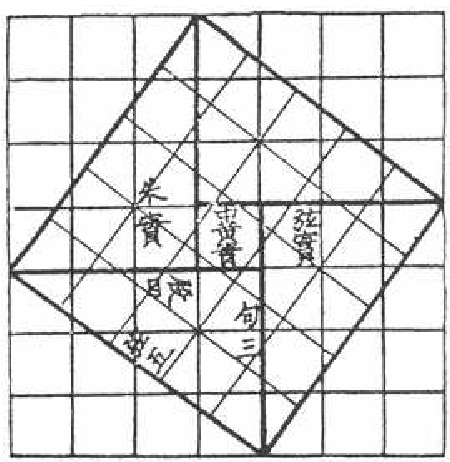


Abbildung 4: *Pythagoräisches Dreieck*, ca. 200 v.u.Z.. zitiert nach [16], Seite 298.

wurden mehrfach kommentiert, im Jahre 556 als offizielles Lehrbuch für die Ausbildung der höheren Beamten eingeführt und im Jahre 1084 erstmals gedruckt. Sie enthalten Aufgaben mit Lösungsangaben für praktische Probleme der Wirtschaft, Vermessung, Kanal- und Deichbau etc., also Flächen von Rechtecken (Feldern), Kreisen ($\pi = 3\frac{3}{8} = 3.375$, später noch genauer) und vor allem eine systematische Behandlung von linearen Gleichungssystemen (Matrizen?). Darüber hinaus wurden die *negativen Zahlen* endeckt, die als Zwischenergebnisse, nicht aber als Lösungen zugelassen werden.

Die Chinesen entwickelten ein Rechenbrett, ihr Zahlensystem bestand zunächst aus Hieroglyphenzeichen, dann (in Hinblick auf das Rechenbrett) wurde eine Stäbchenschreibweise verwendet. Das Zahlsystem selbst war ein dezimales Positionssystem, wobei nach 700 u.Z. aus Indien die Null eingeführt wurde.

Es gibt Hinweise, dass die Chinesen das *"Pascalsche Dreieck"* bereits kannten (siehe Abbildung 5). Sie beschäftigten sich auch mit nichtlinearen Gleichungen höheren Grades,

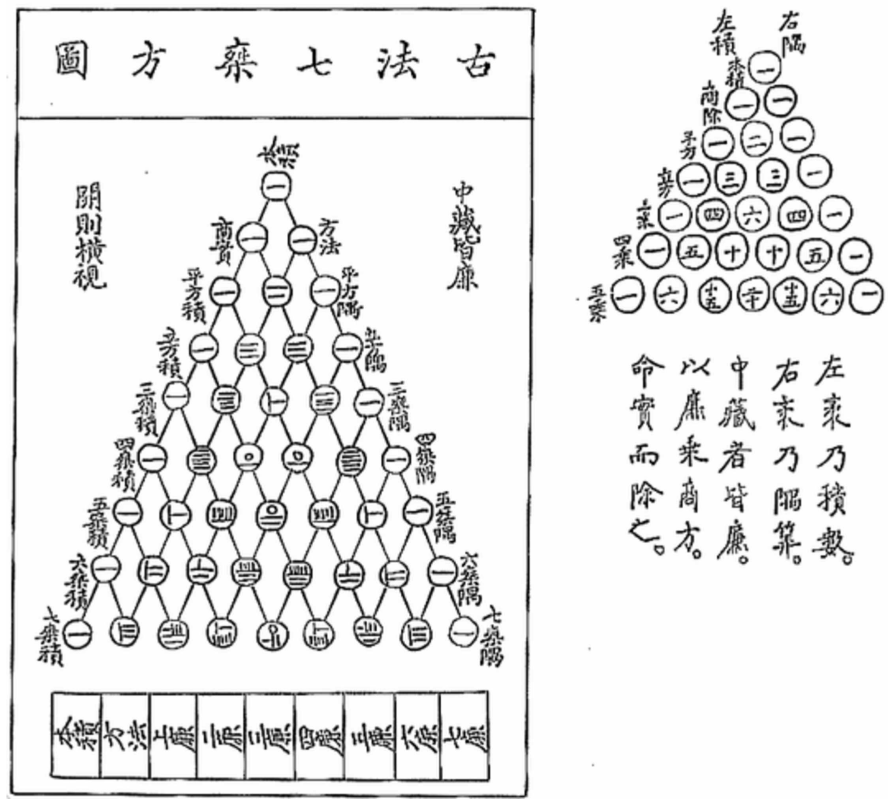


Abbildung 5: *Pascalsches Dreieck.* Links: Aus dem Buch Siyuan Yujian xicao (1303), rechts: Aus Yongle didian (1407), Zitiert nach [16], S. 231.

angeblich unter Vorwegnahme des Hornerschemas und mit sog. *"Magischen Quadraten"*, um nur einige prägnante Beispiele zu nennen.

Man findet auch Hinweise dafür, dass schon recht früh (d.h. vor 200 v.u.Z.) der Satz von Pythagoras bekannt war. Die Zeichnung in Abbildung 4 kann als Beweis dieses Satzes aufgefasst werden. Zum Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes siehe auch die Zeichnung auf Seite 21 (siehe [7], S.178).

Die chinesische Mathematik hat sich zunächst eigenständig entwickelt, bezog aber ab ca. 600 Einflüsse aus Indien und dem nahen Osten, wobei jedoch immer bis in das 16./17. Jhdt. eine stetige Weiterentwicklung zu verzeichnen war. Dann blieb ihre Entwicklung hinter der des mittel- und westeuropäischen Raumes zurück.

Ihr direkter Einfluss auf uns ist bis auf wenige Ausnahmen (etwa die negativen Zahlen, die von China über Indien und Arabien zu uns kamen) relativ gering.

3.2 Mathematik in Indien

Zur Zeit des Baues der Pyramiden in Ägypten gab es bereits auch in Indien eine hochstehende Kultur, es gibt aber keine mathematischen Dokumente aus dieser Zeit (siehe Seite 6). Die Legende sagt, dass Pythagoras auf seinen Reisen auch den Religionsgründer Buddha ($\sim 560-480$) besucht und von ihm den Satz über rechtwinkelige Dreiecke gelernt habe. Man muss dazu allerdings bedenken, dass dieser Satz schon 1000 Jahre vorher bei den Mesopotamiern bekannt war.

Zwischen 200 und 1500 u.Z. entstanden dann die Hauptwerke der Mathematik Indiens.

3.2.0.9 Geometrie und Trigonometrie. Die "Schnurregeln", ein Buch das noch aus der Zeit vor Christi Geburt stammt, enthalten bereits den Satz von Pythagoras sowie Formeln für Flächen und Volumen von 3-Ecken, 4-Ecken, Pyramiden, Kreis, Kugel etc.

Sinus und Tangens wurden eingeführt. Hier gilt der Zusammenhang mit der Sehne (siehe Seite 48): $\sin\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{Se}(2\alpha)$. Das Wort *"Sinus"* hat folgenden Ursprung: indisch *ardha jiva* heißt halbe Bogensehne, später wurde nur mehr *jiva* verwendet; im arabischen sagte man dazu *gaib* = Busen oder Kleiderausschnitt und dafür verwendete man dann in der Gelehrtensprache Latein: *sinus*. Um ca 1000 u.Z. wurden sin, cos, tg auf allen vier Quadranten betrachtet und (den Bedürfnissen der Astronomie entsprechend) trigonometrische Tafeln angelegt. Wir verdanken den Indern den ersten Ansatz zur modernen Trigonometrie.

Zusätzlich verdanken wir ihnen aber auch noch unser

3.2.0.10 Ziffernsystem. Das indische Zahlensystem ist ein *dezimales Positionssystem* und ist eine glückliche Kombination dreier Prinzipien, die alle schon vorher bekannt und verschiedentlich verwendet wurden:

- Dezimalsystem
- Positionssystem
- Spezielle Zeichen für Zahlen

Zunächst wurden nur Zeichen für 1 bis 9 verwendet, ab dem 7. Jhdt. war auch die Null gebräuchlich, als Punkt und später ein Ringlein. Dieses Zeichen wurde mit *"leer"* bezeichnet, sowohl bei den Indern wie auch dann bei den Arabern, die das indische System übernahmen. Das Wort *leer* heißt bei den Arabern *"as-sifr"*. Man findet noch bei Michael Stifel z.B. in seinem Buch *Arithmetica integra*, Nürnberg 1544, für die Null das Wort *"cifra."* Auch das französische *"zero"* leitet sich davon ab und das Wort *"Ziffer"* hat ebenfalls diesen Ursprung. Die Zahlenschrift erhielt also ihre Bezeichnung nach dem Wesen der Sache, nämlich der Null! (Wußing [26])

Die indischen Zahlen wurden bereits im 8. Jhdt. in den islamischen Raum (Bagdad) gebracht, und werden von dort aus, zunächst nur im islamisch kontrollierten Gebiet und relativ spät (11./12. Jhdt.) dann auch im übrigen Europa verbreitet.

3.2.0.11 Algebra. Die Inder beherrschten bereits vor dem Jahre 1000: Lineare Gleichungen, vollständige Lösung der quadratischen Gleichungen im reellen Fall (auch negative Lösungen), auch ganzzahlige Lösungen von Gleichungen (Diophantische Gleichungen), Rechnen mit unbekannten Größen, Klammern und Polynomen.

An bedeutenden Mathematikern sollen nur wenige angeführt werden:

3.2.0.12 Bramagupta (um 630). Er behandelte quadratische Gleichungen, gab eine systematische Theorie der Null und der negativen Zahlen, mit Vorzeichenregeln und insbesonders die diophantische Gleichung

$$ax + by = c, \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

mit ganzzahligen Lösungen.

3.2.0.13 Bhâskara II. (1114– $\sim$ 1185) (Lit.: [4], Seiten 585, 577, 583). Ein Werk von ihm nennt sich *"Kranz der Wissenschaften."* Er löst dort quadratische Gleichungen und spricht als einer der ersten von Doppelsinnigkeiten und Unmöglichkeiten beim Lösen von quadratischen Gleichungen: *" Das Quadrat einer positiven wie negativen Zahl ist positiv und die Quadratwurzel ist zweifach, positiv und negativ. Es gibt keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl."*

Dementsprechend gibt er auch zwei Lösungen an, aber nur dann, wenn sie positiv sind und kein "Durchgang durch ein Negatives" erforderlich ist, weil *"negative Zahlen werden von den Leuten nicht gebilligt."*

Ein Beispiel: *"Der 8-te Teil einer Herde Affen ins Quadrat erhoben hüpfte in einem Haine herum und erfreute sich an dem Spiele, die 12 übrigen sah man auf einem Hügel miteinander schwatzen. Wie stark war die Herde?"* Als Lösung der quadratischen Gleichung

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

gibt es zwei Lösungen, 48 und 16.

Ein Durchgang durch ein Negatives erfolgt etwa bei folgendem Beispiel: *"Das Quadrat des um 3 verminderten 5-ten Teils einer Herde Affen war in einer Grotte verborgen, 1 Affe war sichtbar, der auf einen Baum geklettert war. Wie viele waren es im Ganzen?"* Bhâskara sagt 50 oder 5, aber die zweite Wurzel dürfe nicht genommen werden.

$$\left(\frac{x}{5} - 3\right)^2 + 1 = x$$

hat die Lösungen 50 und 5, aber $\frac{5}{5} - 3$ ist negativ.

Weiters werden von ihm auch Gleichungen 3-ten Grades und insbesondere deren ganzzahligen Lösungen behandelt.

Darüber hinaus findet man hübsche poetisch formulierte Aufgaben, so in einem Kapitel, genannt *"Lîlâvati"* (die Reizende): *"Schönes Mädchen mit den glitzernden Augen sage mir, so Du die richtige Methode der Umkehrung verstehst, welches ist die Zahl, die mit 3 vervielfacht, sodann um $\frac{3}{4}$ des Produktes vermehrt, durch 7 geteilt, um $\frac{1}{3}$ des Quotienten vermindert, durch Ausziehung der Quadratwurzel, Addition von 8 und Division durch 10 die Zahl 2 hervorbringt."* Das heißt:

$$\left(\sqrt{x \cdot 3 \cdot (1 + 3/4) : 7 \cdot (1 - 1/3)} + 8\right) : 10 = 2.$$

Lösung nach der *"Methode der Umkehrung:"*

$$(2 \cdot 10 - 8)^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 7 \cdot \frac{4}{7} : 3 = 288 = x.$$

Oder ein weiteres: *"Von einem Schwarm Bienen lässt $\frac{1}{5}$ sich auf eine Kadambablüte, $\frac{1}{3}$ auf der Silandablüte nieder. Der dreifache Unterschied der beiden Zahlen flog nach den Blüten eines Kutaja, eine Biene blieb übrig, welche in der Luft hin- und herschwebte gleichzeitig angezogen durch den lieblichen Duft einer Jasmine und eines Pandamus. Sage mir reizendes Weib, die Anzahl der Bienen."*

Beispiele dieser Art gab es aber schon vorher von dem Mathematiker Çridhara: *"Bei verliebtem Ringen brach eine Perlenschnur; $\frac{1}{6}$ der Perlen fiel zu Boden, $\frac{1}{5}$ blieb auf dem Lager liegen, $\frac{1}{3}$ rettete die Dirne, $\frac{1}{10}$ nahm der Buhle an sich, 6 Perlen blieben aufgereiht; sage wie viele Perlen hat die Schnur enthalten?"*

3.3 Mathematik im islamischen Reich

Die arabische Halbinsel, Ausgangspunkt verschiedener Vorstöße semitischer Völker nach Norden und Westen, aber auch dauernd offen für kulturelle Einflüsse aus Nachbarstaaten wird im 7. Jhdt. kurzfristig Mittelpunkt das Weltgeschehens und gleichzeitig Ursprungsland einer großen Weltmacht.

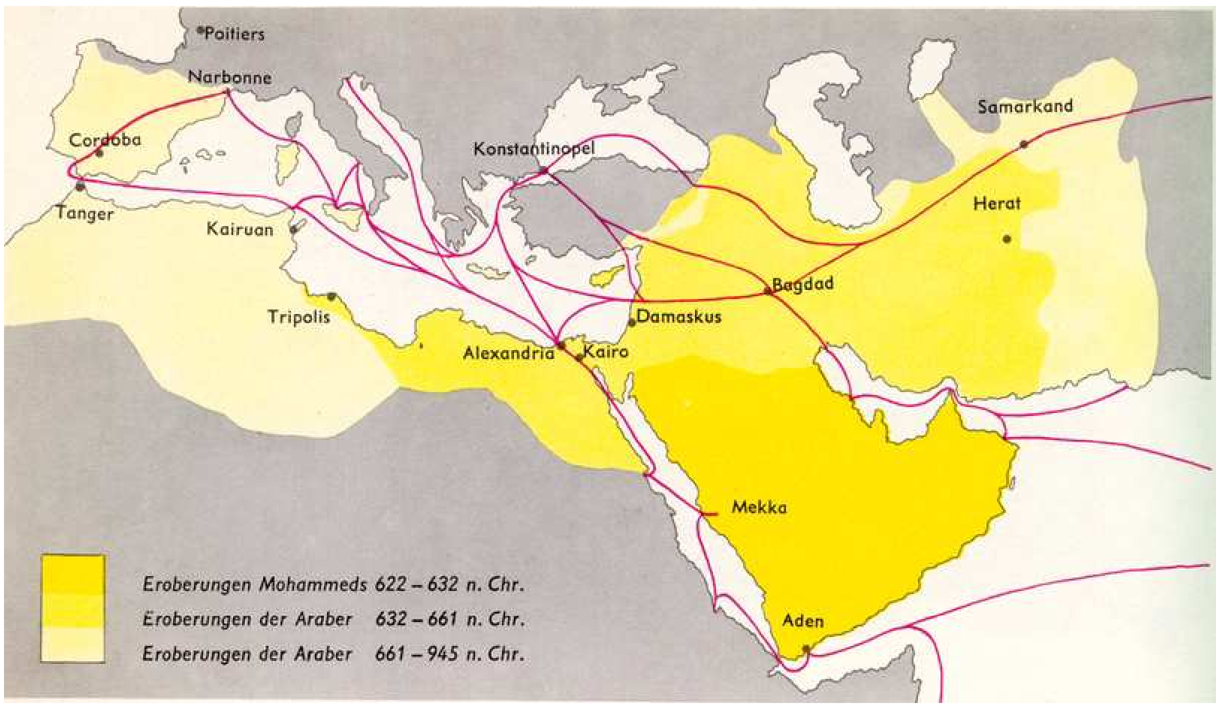


Abbildung 6: *Diese Karte illustriert das Wachsen des arabischen Reiches zwischen 622 und 945 u.Z., und zeigt einige wichtige Handelsstraßen. In diesem Gebiet gelang arabischen Gelehrten eine fruchtbare Synthese östlicher und westlicher Mathematik.* Zitiert nach [11], Seite 150.

Im Laufe von drei Jahrhunderten haben die Araber einen Großteil des Mittelmeeres erobert, das arabische Reich breitete sich beginnend mit dem Jahr 622 von der arabischen Halbinsel über Ägypten, Libyen, entlang der nordafrikanischen Küste bis Spanien und den Pyrenäen einerseits und Kleinasien bis Konstantinopel andererseits aus.

Die Kraft zu diesen Eroberungen liegt in der Religion des Islam (= Hingebung) begründet, die auf den Propheten und Religionsstifter Mohammed (Abul Kasim Muhammed

Ibn Abdallah, $\sim 570 - 632$) zurückgeht. Sie war eine Protestbewegung, die die sozialen und religiösen Mißstände der herrschenden Tradition und Religion bekämpfte. Das Kalifenreich (Kalif ist der Titel der Nachfolger Mohammeds) erreicht besonders unter den Abbasiden ($750 - 1258$) eine Hochblüte in Wirtschaft, Wissenschaft und Kultur, gefördert durch die Kalifen.

Bekanntester Kalif ist Harun al Raschid ($786 - 809$). Sein Sohn und Nachfolger Al Ma'mūn gründete in Bagdad[6] ein *"Haus der Weisheit"* mit Bibliothek und Observatorium. Die Werke der alten Mathematiker (insbesondere der griechischen, deren Manuskripte über Byzanz durch Kaufleute nach Bagdad kamen), werden übersetzt und kommentiert, Anregungen von außen (Indien, China) werden aufgenommen und weiterentwickelt. Neben Bagdad gibt es auch noch andere mathemaisch-wissenschaftliche Zentren besonders in Spanien, wie z.B. Cordoba, Sevilla und Toledo.

In dieser Zeit erlebt die Mathematik im Islam eine Verfestigung und Vertiefung der Methoden in Algebra, Geometrie und inbesondere der Trigonometrie, wobei Beweismethoden der Griechen übernommen wurden, trotzdem aber eine Lockerheit im Umgang mit Zahlen im arithmetischen Sinne gepflegt wurde, analog wie bei den Babyloniern, Indern und Chinesen.

Wohl der bekannteste arabische Mathematiker ist

3.3.1 Al-Ḫwãrizmi

Muhammed ibn Musa al-Ḫwãrizmi oder *al-Khwãrizmi* (780– $\sim$ 859) stammt aus Chiwa, Usbekistan, früher *Choresm* genannt, also der *von Choresm*. Er war in Choresm und Bagdad tätig. Von ihm sind Schriften zur Algebra, Astronomie und Geographie bekannt. Besonders zwei davon sind hervorzuheben:

3.3.1.1 Algorithmi, de numero indorum. So lautet der Titel der lateinischen Übersetzung aus dem 12. Jhdt. (siehe Seite 62), also: *"Al-Ḫwãrizmi: Über die Zahlen der Inder."* Es handelt sich hier um eine im europäischen Raume weit verbreitete "Bedienungsanleitung" für die indischen Zahlen, die daher, weil sie über die Araber zu uns gekommen sind, *"arabische Zahlen"* heißen. Hiervon leitet sich der Name ***Algorithmus*** ab.

3.3.1.2 Die Algebra des al-Ḫwãrizmi. Ein zweites Buch hat dem Titel *"Al-kitab al-muḫtaṣar fi ḥisãb al-ǧabr wa'l-muqãbala."*

Al-kitab = Buch, *ḥisãb* = Rechnen, *al-ǧabr* = Ergänzung/Reduktion,
wa'l-muqãbala = Gegenüberstellung/Aufhebung,

Diese Schrift, die in einer arabischen und mehreren lateinischen Handschriften erhalten ist, befasst sich mit der Auflösung von linearen und quadratischen Gleichungen mit Zahlenkoeffizienten. Es handelt sich also um ein Buch über die Wissenschaft der Gleichungen, was ja die *Algebra* bis zum frühen 19. Jhdt. fast ausschließlich war.

Al-Ḫwãrizmi schreibt über die Ziele und Absichten folgendermaßen. Er wolle ein kurzgefasstes Buch schreiben, *"von den Rechenverfahren der Ergänzung und Ausgleichung mit Beschränkung auf das Anmutige und Hochgeschätzte des Rechenverfahrens für das, was die*

[6]Bagdad selbst ist 762 gegründet worden und hat sich in der Zwischenzeit zum Zentrum des islamischen Reiches entwickelt

Leute fortwährend notwendig brauchen bei ihren Erbschaften und Vermächtnissen und bei ihren Teilungen und ihren Prozessbescheiden und ihren Handelsgeschäften und bei allem, womit sie sich gegenseitig befassen, von der Ausmessung der Ländereien und der Herstellung der Kanäle und der Geometrie und anderem dergleichen nach seinen Gesichtspunkten und Arten."

3.3.2 Verdienste der islamischen Mathematiker

- Sie haben uns den Zugang zu den arabisch-indischen Zahlen vermittelt.

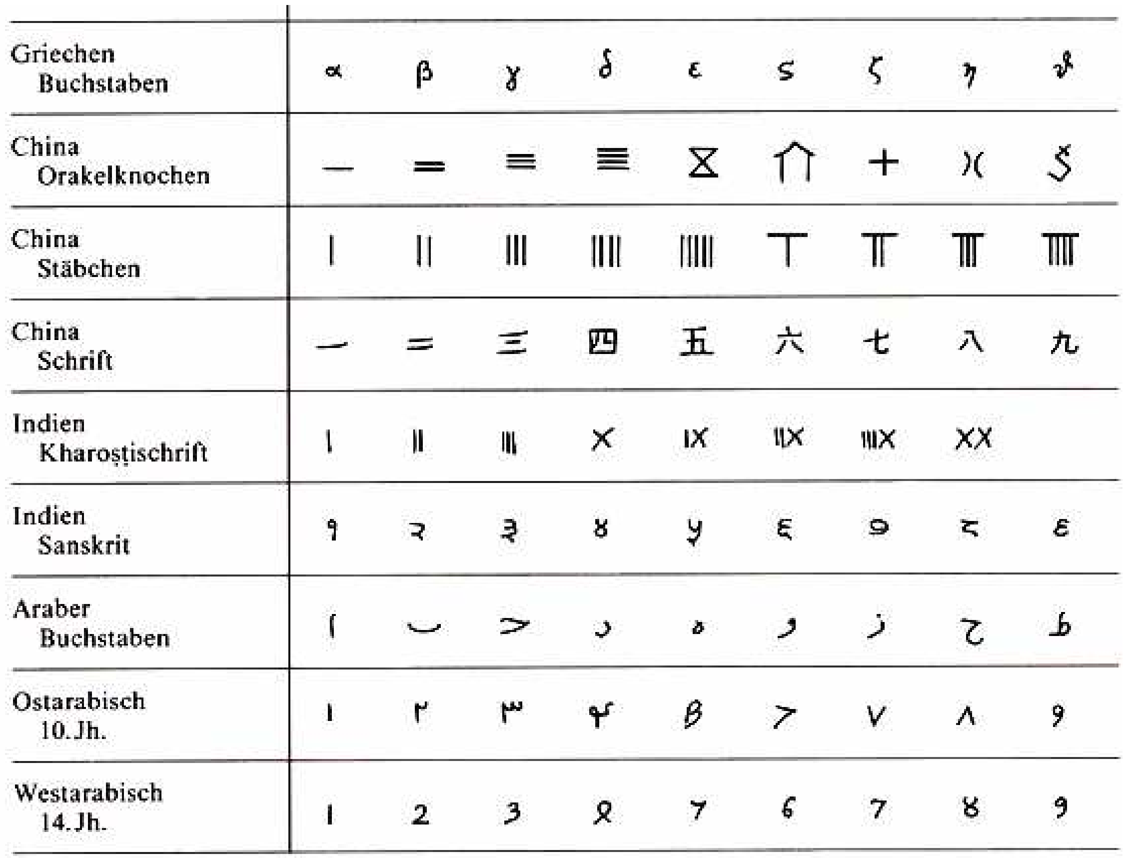


Abbildung 7: *Verschiedene Zahlenschriften. Aus [7], S. 286.*

- Sie haben die klassischen Werke der griechischen Mathematiker sorgfältig überliefert. Viele dieser Werke kamen über die Araber (z.T. auch über das arabische Spanien mittels der Übersetzung durch die spanischen Juden) in das europäische Abendland und waren zuerst durch die arabischen Übersetzungen bekannt. Von manchen griechischen Mathematikern (z.B. Ptolemaios) gibt es überhaupt keine griechischen Urhandschriften mehr, von manch anderem wurden griechische Originalschriften erst viel später (sogar bis ins 20. Jhdt.) gefunden.
- Sie haben die griechischen Ansätze etwa in Geometrie und bei Gleichungen aufgenommen und weiter entwickelt.
- Sie haben die "Algebra" weiterentwickelt, indem sie nicht nur mit ganzen Zahlen, sondern auch mit Wurzelausdrücken und Potenzen und mit Ausdrücken, die Unbestimmte enthalten, rechnen und dafür eigene Worte einführen.

- Es werden genauere Rechenverfahren und iterative Lösungsverfahren für Gleichungen 3-ten Grades und Gleichungen die den Sinus enthalten eingeführt. Das Rechnen mit Dezimalbrüchen wurde eingeführt. Auch die Trigonometrie wurde nicht nur von den Indern übernommen, sondern auch als selbständige Theorie weiterentwickelt. Es wurden auch schon Tabellen für die Winkelfunktionen berechnet.
- Insbesondere ist hier AL-KĀŠĪ († 1429) zu nennen. Er gab eine exakte Berechnung von π auf 17 Dezimalstellen genau, sowie eine sehr genaue Berechnung des Sinus von $1°$. Von ihm existiert auch eine (weitverbreitete) Schrift über das Rechnen mit Dezimalbrüchen.

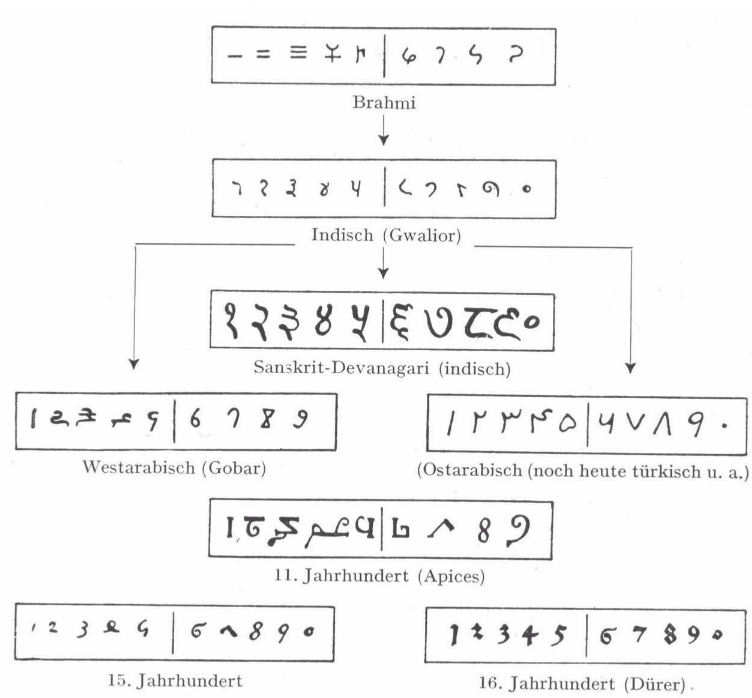


Abbildung 8: *Stammbaum unserer Ziffern. (Aus Menninger, Zahlwort und Ziffer; zitiert nach [24], S. 85). Aus* [7]*, S. 286.*

4 Europa im Mittelalter

4.1 Das Erbe der Römer

Die Römer begannen etwa nach dem Ende der Punischen Kriege (gegen Karthago) im 1. Jhdt. v.u.Z. sich mit der griechischen Kultur auseinanderzusetzen und diese zu übernehmen. Die Mathematik hatte ihre Bedeutung in erster Linie

- als Anwendung in Vermessung, in Architektur und in der Kalenderrechnung,
- als Teil der Allgemeinbildung eines Gebildeten, dazu gehörte nur ein gewisses Grundwissen und ein bisschen Zahlenmystik.

Das Zahlensystem der Römer ist wie bei den Griechen *kein* Positionssystem, die Zahlzeichen entsprechen jeweils einem bestimmten Zahlenwert. Die Zeichen: I, V, X, L, C, D, M stehen für: 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Sie werden sooft gesetzt, wie Einheiten dieser Größe vorhanden sind, jedoch maximal 3 mal.

Die Zahlenreihe: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 40, 90, 400, 900, lautet demgemäß:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XL, XC, CD, CM.

Es lagen inzwischen genügend Lehrbücher vor, die die Regeln und Methoden der damaligen Mathematik beschrieben. Diese schienen für die herrschenden Bedürfnisse auszureichen, sodass im Zeitalter der Römer keine Entwicklung in der Mathematik zu verzeichnen ist. Böse Zungen sagen, dass der Beitrag Römer zur Mathematik darin bestand, den bedeutendsten Mathematiker der Antike, nämlich Archimedes ermordet zu haben. Das ist natürlich so nicht richtig. Die Römer haben das Wissen der damaligen Zeit, also das der Griechen insbesondere gesammelt. Wenn auch Bibliotheken durch die Römer geplündert und verbrannt worden sind, so wurde auch viel Schrifttum in Rom gesammelt und von dort auch uns überliefert.

Die Mathematik der Griechen allerdings hatte einen gewissen Plafond in der Entwicklung erreicht, der nur durch wesentliche Impulse von außen (gesellschaftliche Veränderungen, Anregungen von anderen Kulturen etc.) durchstoßen werden konnte. Eine Weiterentwicklung unter Wahrung der strengen Ansprüche der griechischen Mathematiker war eigentlich zur Zeit der Römer nur schwer möglich.

Daher wurden die Werke der griechischen Mathematiker zwar weiter aufbewahrt, oft aber nicht einmal verstanden. Es wurden höchstens die Methoden in der Anwendung in Vermessung und Architektur verfeinert. Immerhin wurde um 46. v.u.Z. unter Julius Cäsar (100 – 42) der sogenannte “Julianische Kalender” mit 365 Tagen und einem Schalttag zusätzlich alle 4 Jahre eingeführt.

Folgende Jahreszahlen sind in diesem Zusammenhang von Bedeutung:

476 u.Z. Fall von Rom

529 u.Z. Schließung der Philosophenschule in Athen. Diese Jahreszahl markiert das **Ende** der hellenistischen Periode und den **Beginn** der mittelalterlichen Periode in der Geschichte der Mathematik im europäisch-abendländischen Raum.

Der römische auf Sklavenhalterei und Machtimperialismus aufgebaute Staat ging nach erbitterten sozialen Kämpfen und unter dem Ansturm äußerer Feinde unter. Der politische Untergang ging einher mit dem Zerfall von Wirtschaft und Handwerk.

4.2 Frühmittelalter

Das frühe Mittelalter ist durch eine eher primitive Wirtschaft, und ein niedriges Niveau in Landwirtschaft und Technik gekennzeichnet. Ab cirka 300 beginnt sich die christliche Religion im Abendland zu festigen. Hier sind jetzt die Wissensträger, also die Gebildeten, fast ausschließlich Kirchenleute, also Mönche, Priester und Bischöfe. Diese zeigen sich aber an naturwissenschaftlichen und speziell mathematischen Disziplinen eher uninteressiert. Von den sogenannten *"Kirchenvätern"* (Patres) im 2.-5. Jhdt. wurde diese Einstellung auch ausgesprochen. TERTULLIAN, ($\sim 160-$ nach 220) sah in der Philosophie, d.h. in der griechisch-hellenistischen Wissenschaft die eigentliche Quelle der Ketzerei und betonte den unüberbrückbaren Unterschied zwischen Wissen und Glauben: *"Wissbegier ist uns nicht nötig, seit Jesus Christus; auch nicht Forschung seit dem Evangelium"* ([26], S. 102).

Von den Kirchenvätern ist wohl AUGUSTINUS, (354 – 430) Bischof von Nordafrika, derjenige, der die Haltung der Kirche zu Naturwissenschaft und Mathematik für die kommenden Jahrhunderte geprägt hat. Er betont zwar einerseits die Überflüssigkeit und die Gefahren dieser "heidnischen" Wissenschaften, andererseits sieht er aber auch deren Nützlichkeit: *"Eine andere Sache sei die Aneignung nützlicher Kenntnisse und Fertigkeiten, da man keine genaue Angaben über den Zeitpunkt der Errichtung des Gottesreiches machen könne und man sich daher auf die Eroberung der bestehenden Welt für das Wort Gottes einstellen müsse. ... Erst die Christen können den richtigen Gebrauch von den wissenschaftlichen Gütern machen, nämlich den, die Offenbarung Gottes in der Natur zu erweisen. Aber es bleibe die Hauptbedingung jeder Beschäftigung mit der Wissenschaft, dass jede Wissenschaft der Heiligen Schrift unterworfen sei. ... Seitdem war im christlichen Bereich über Jahrhunderte das Primat des Glaubens vor dem Wissen fixiert"* (frei zitiert nach [26], S. 102f.).

Die christlich-katholische Kirche versuchte nun, so gut wie sie konnte, die kulturelle Tradition des römischen Reiches zu bewahren. Kirchenleute und auch gebildete Laien erhielten etwas von der römischen Tradition lebendig, so z.B.:

4.2.0.1 Boetius.

ANICIUS MANLIUS SEVERINUS BOETIUS, 480 – 524, Diplomat und Philosoph. Mehrere mathematische Bücher (man könnte sagen "Volksausgaben") stammen von ihm, Ausschnitte aus Euklid, Nikomarchos und Ptolemaios, die in der westlichen Welt über tausend Jahre als wesentlich angesehen wurden, vermutlich unter anderem auch deshalb, weil er als christlicher Märtyrer (vorher war er Ratgeber des Ostgotenkönigs Theodorich d. Gr.) im Gefängnis saß und dann hingerichtet wurde.

Unter diesen Umständen ist es nicht verwunderlich, dass die Mathematik im frühen Mittelalter auf einem eher bescheidenen Niveau stand, sie beschränkte sich auf elementarem Abacus- (Rechenbrett) Rechnen, auf elementarer Feldmesskunst und der Kalenderrechnung, hier insbesondere der Berechnung der beweglichen kirchlichen Feiertage.

4.3 Die karolingische Frührenaissance

Eine spürbare Wiederbelebung in Wirtschaft, Kultur und Wissenschaft setzte in Europa erst mit dem 8. und 9. Jhdt. ein und zwar nach Etablierung der feudalen Herrschaftsordnung (d.h. Lehenswesen einerseits und Leibeigenschaft andererseits). Bessere Methoden in der Landwirtschaft, wie Kummet und Hufeisen bei Tieren, Pflüge mit stählernen Messern etc. trugen zur Steigerung der Produktivität in der Landwirtschaft bei, einfache technische Errungenschaften, wie Wind- und Wassermühlen, ebenso.

Unter den Karolingern bildet sich eine politische Formation zum Großreich im christlichen Europa heraus und man kann auch schon etwas von einer zentral gelenkten Bildungspolitik feststellen. Karl der Grosse (Krönung zum Kaiser im Jahre 800), der selbst trotz größter Anstrengung nie das Lesen und Schreiben wirklich beherrscht haben soll, war bestrebt, das Bildungsniveau der Geistlichkeit und der Beamten im Interesse der Stärkung der Macht anzuheben. So berief er um 781 den aus England stammenden Mönch

4.3.0.2 Alcuin von York

($\sim 735 - 804$) an seinen Hof. Auf dessen Initiative wurde in Tours eine ständige höher Bildungsstätte eingerichtet, in der auch mathematisches Wissen vermittelt wurde. Auch in anderen Klöstern, wie etwa Fulda oder St. Gallen (Schweiz) war man um die Pflege wissenschaftlicher Gedanken bemüht. Von Alcuin selbst gibt es eine Aufgabensammlung unter dem Titel: *"Propositiones ad acuendos juvenes"* (Aufgaben zur Übung der Jugendlichen), die deutlich an die Vorlagen aus dem Orient und der Antike anknüpft, z.B. an eine bei Heron schon zu findende Aufgabe über das Befüllen eines Wasserbehälters etc.. Die folgende zwei Beispiele seien angeführt:

- *Ein Hund verfolgt ein Kaninchen, das anfänglich einen Vorsprung von 150 Fuß hat. Er springt jedesmal 9 Fuß weit, während das Kaninchen nur Sprünge von 7 Fuß macht. Nach wieviel Sprüngen hat der Hund das Kaninchen eingeholt?*
- Fährmannproblem: *Ein Wolf, eine Ziege und eine Ladung Kohl müssen in einem Boot über einen Fluss gebracht werden, das außer dem Fährmann nur eine der anderen Ladungen tragen kann. Wie muss der Fährmann verfahren, um alle hinüberzubringen, ohne dass der gierige Wolf die Ziege oder die hungrige Ziege den Kohl frisst?*

4.4 Hochmittelalter

Das wirtschaftliche und kulturelle Leben entwickelte sich im Laufe von 12. und 13. Jhdt. in religiösen Zentren (Klöstern) und in bürgerlichen Städten, wo sich insbesonder das Handwerk in Zünften organisiert hat. Der Handel mit nah und (vor allem) fern brachte die christlich abendländische Kultur in Kontakt mit dem Islam und auch mit Indien und China. So gelangten Kenntnisse zur Herstellung von Seide, Papier und Schießpulver u.a. nach Europa. "Damaszener Klingen" und "Damast" sind nach der Stadt Damaskus benannt.

Als einer der markantesten Fälle der Begegnung des christlichen Mittelalters mit der Welt des Islams auf dem Gebiet der Mathematik geschah mit dem französischen Mönch Gerbert, dem nachmaligen Papst Sylvester II, der in Spanien die islamische Mathematik und insbesondere die *"arabischen Zahlen"* kennenlernte. Von ihm ist auch die erste bekannte schriftliche Darstellung des Abacus-Rechnen bekannt.

Ab dem 12. Jhdt. wurde immer mehr mathematisches Wissen der arabischen und damit auch der griechischen Mathematik in Europa aufgenommen. Hier spielten die Araber des Islams eine bedeutende Rolle, und da vor allem die spanisch-arabischen Schulen wie Toledo und Cordoba. Über sie wurde das Wissen auf das ganze Europa verbreitet, wobei die Schriften aus dem Arabischen oft erst in die kastilische oder hebräische Sprache und dann erst in das Lateinische übersetzt wurde. So hat Johann von Sevilla um 1140 das Rechenbuch des al-Ḫwãrizmi über die indischen Zahlen (siehe Abschnitt 3.3.1) übersetzt.

Es spielten aber auch die spanischen Juden, die durch ihre Handelstätigkeit mehrere Sprachen beherrschten, eine große Rolle in der Vermittlung der Wissenschaften.

4.4.1 Anfänge einer eigenständigen Entwicklung in Europa

Im 12. und 13. Jhdt. waren Pisa, Florenz, Venedig, Mailand und Genua bedeutende Handelsstädte, deren Handelsbeziehungen bis in den nahen und fernen Osten reichte. Die Fernostreisen des Marco Polo, ($\sim 1254 - 1324$) sind ja durch seine Reiseberichte überliefert. Wachsender Handel und Wirtschaft erforderten wachsende Buchhaltung und Lagerhaltung, alles Anwendungsgebiete der Rechentechnik. Mathematik in Form von Rechnen und Messen war wieder mehr gefragt.

4.4.1.1 Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci (Sohn des Bonacci), $\sim 1179-\sim 1250$. Fibonacci war Kaufmann und Mathematiker und machte viele Handels- und Bildungsreisen in den Orient. Er verfasste eines der ersten Bücher über das Rechnen mit den indisch-arabischen Zahlen und zwar das "***Liber Abaci***" (Buch vom Abakus). Es handelt sich hier jedoch nicht um das Rechnen mit dem Rechenbrett, sondern es wird das Rechnen mit den arabischen Ziffern systematisch dargestellt. Es beginnt der Siegeszug dieser Zahlen.

Ein weiteres Buch mit dem Titel *"Practica Geometria"* behandelt kubische Gleichungen. Hier treten auch die sogenannten ***Fibonacci-Zahlen*** auf:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$$

und zwar *rekursiv definiert* durch $a_0 = 0$, $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1},\ n = 1, 2, ...$$

Leonardo leitete diese Zahlen aus folgendem Problem her:

Problem: *Wieviele Kaninchenpaare entstehen aus einem Paar in einem Jahr, wenn i.) in einem Monat jedes Paar ein neues Paar bekommt das wiederum vom 2. Monat an wieder selbst neue Paare bekommt und ii.) keine Todesfälle auftreten.* Somit:

$$a_{k+1} = 2a_k - (a_k - a_{k-1}).$$

Fibonacci-Zahlen und Goldener Schnitt: Die Fibonacci Zahlen haben die Eigenschaft $\mathrm{ggT}(a_n, a_{n-1}) = 1$ für alle natürlichen Zahlen n, und weiters gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Das ist die Verhältniszahl des *"goldenen Schnitts"* (siehe Seite 24). Diese Verhältniszahl kommt in der Natur im Wachstum von Pflanzen (Phyllotaxis) sehr häufig vor.[7]

Dieses Verhältnis wird als schön empfunden und daher in der bildnerischen Kunst und Architektur der Antike bis zur Moderne (Ionische Säulen und Tempel, Petersdom in Rom, Bilder von Dürer und Raffael, Dom in Limburg und Köln, Häuser mit Inneneinrichtung von Le Corbusier, siehe Abbildung 10, etc.) sehr oft angewendet.

[7] Literatur: Otto Hagenmaier: *"Der Goldene Schnitt"*, Verlag Moos &Partner, München 1984

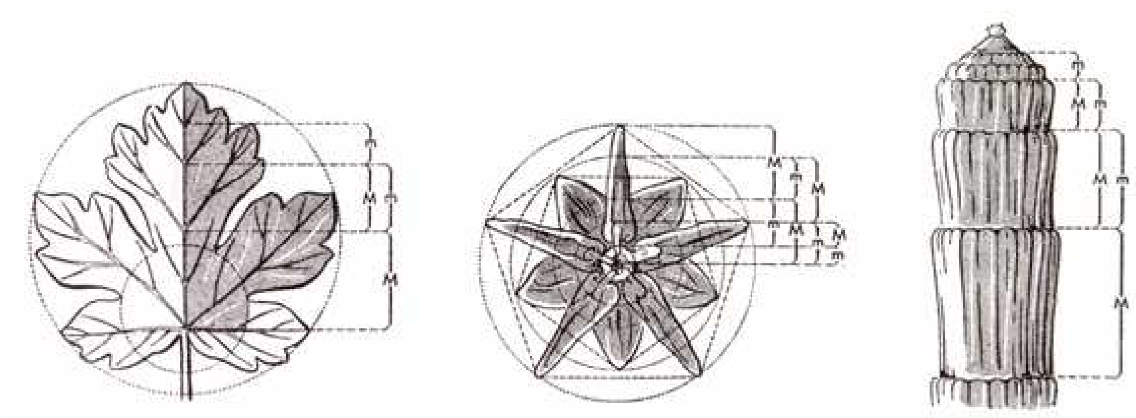


Abbildung 9: *Goldene-Schnitt-Proportion bei Pflanzen, von links Hahnenfuß, Seidenpflanze, Schachtelhalm.* Aus: Hagenmaier, Seite 21.

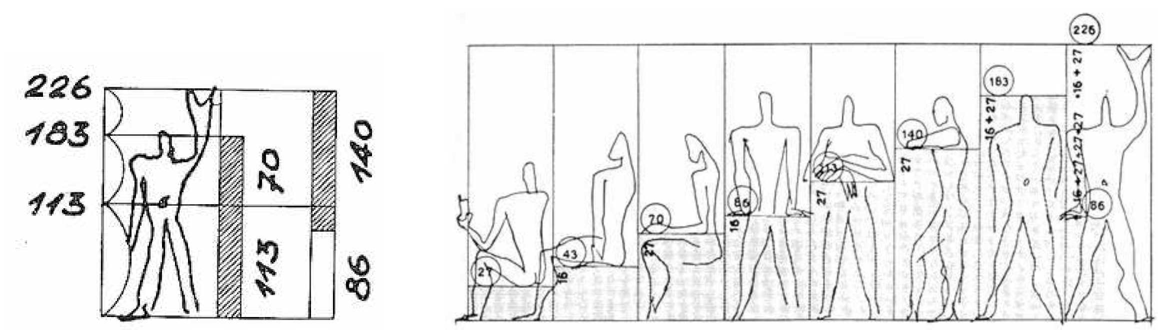


Abbildung 10: Aus: Le Corbusier: **Der Modulor**, *Darstellung eines in Architektur und Technik allgemein anwendbaren Maßes im menschlichen Maßstab*, Seiten 66-67. Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart, 1985.

Auch in der reinen Mathematik ist die Verhältniszahl des Goldenen Schnittes $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618033...$ von Interesse. So hat diese Zahl in der Kettenbruchentwicklung lauter Einser:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}.$$

4.4.2 Die Scholastik, Gründung von Universitäten

Im wesentlichten waren im Mittelalter die kirchlichen Institutionen und vor allem die Klöster die Träger des wissenschaftlichen Lebens. Die Kirche hatte die Wichtigkeit erkannt, Wissenschaft zur Festigung ihrer politischen und ökonomischen Macht einzusetzen und dass daher ihre Mitglieder des Lesens und Schreibens kundig sein sollten. Andererseits liegt es auch in der Tradition, dass Religionsmänner die Erhaltung des Wissens als ihre Pflicht ansahen. So wurden Domschulen zur Pflege und Weitergabe des Wissens eingerichtet. Sie hatten auch die Aufgabe, sich die Gesamtheit *(universitas)* des Wissens anzueignen und an ihre Schüler weiterzugeben.

Daraus entstanden dann die *"Universitäten."* Die berühmteste davon, die von *Paris* wurde 1160 von der Kirche als Lehranstalt anerkannt, also nicht gegründet. Erst spätere Universitäten wie die in *Oxford* oder *Cambridge* wurden noch im 12. Jhdt. bewusst nach dem Vorbild von Paris als Lehrinstitution der Kirche gegründet. Vorher gab es bereits in Italien in *Bologna (11. Jhdt.)* eine Universität. Weitere Gründungen sind: *Padua (1222), Salamanca (1254), Prag (1348)* als erste deutschsprachige Universität, sowie Wien (1356).

Die ***Karl-Franzens-Universität Graz*** ist mit dem Jahre 1585 eine relativ junge Universität. Sie ist von Erzherzog Karl von Innerösterreich als Jesuitenuniversität zur Stärkung des Kampfes in der Gegenreformation gegründet worden. 1782 wurde sie unter Josef II zum Lyzeum degradiert, wobei jedoch noch Studierende zum Doktor der Medizin promoviert werden konnten. Im Jahre 1827 ist sie unter Kaiser Franz I, aber auf Initiative von Erzherzog Johann wieder als Universität eröffnet worden.


Abbildung 11: *Erzherzog Karl von Innerösterreich und Kaiser Franz I. von Österreich, Begründer und Wiederbegründer (und Namensgeber) der Grazer Universität*

An den mittelalterlichen Universitäten bildete sich eine Lehrform heraus, die man *"Scholastik"* nennt als *"Schullehre"* mit Verlesen von Schriften der Weisen und Disputationen darüber, d. h. Auslegung und Interpretation dieser Schriften.

Der Werdegang eines gelehrten Jünglings (normalerweise nur aus gehobener Gesellschaftsschicht, Mädchen wurden kaum zugelassen) war etwa der folgende:

- Lateinschule
- mit 10-12 Jahren Immatrikulation an der Universität
- Studium des *"Triviums"* Grammatik, Rhetorik und Dialektik (*"trivial"* ist also das was am Beginn ist)
- Studium des *"Quadriviums"* Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik
- Trivium und Quadrivium wurden als die sieben freien Fächer, die *"artes liberales"* in der *"Artistenfakultät"* zusammengefasst. Diese wurde mit dem Titel *"Magister"* abgeschlossen

- An den höheren Fakltäten erfolgte dann die Ausbildung Theologie, Jus und Medizin. Mit dem Titel *“Doctor”* als Abschluss. Einen Titel Doctor für Mathematiker etwa gab es nicht.

Die mathematisch-naturwisssenschaftliche Ausbildung an den Universitäten war auf einem eher bescheidenen Niveau: elementares Rechnen und Grundzüge der Geometrie, Astronomie war mit Astrologie vermischt, es reichte gerade zur Kalenderberechnung. Allerdings wurde langsam auf die Wurzeln der antiken Mathematik und Astronomie zurückgegriffen.

So wurden allmählich die *Elemente von Euklid* und der *Almagest von Ptolemaios* sowie Werke von Apollonius, Hipparchos (ein bedeutender Astronom, $\sim 190 - 125$ v.u.Z.) und Archimedes im 13. Jhdt. bekannt.

Besonders hervorzuheben ist

Nicolaus Oresme, $\sim 1323 - 1382$**,** Bischof von Lisieux. Er verwendete graphische Darstellungen von physikalischen Vorgängen und er liefert damit so etwas ähnliches wie den Graph einer Funktion, wenn man auch von einem richtigen Funktionsbegriff weit entfernt war. Bei ihm treten schon allgemeinere Regeln für das Potenzrechnen auf: aus der Identität $4^3 = 8^2$ folgert er, dass man 8 auch als $4^{1\frac{1}{2}}$ schreiben könne, er lässt also *gebrochene Exponenten* zu. Weiters erkennt er auch die Divergenz der harmonischen Reihe:

$$\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^k+1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{>\frac{1}{2}} + \ldots$$

Wenn auch in der Scholastik die *Logik* in hohem Ansehen stand, sind doch neue mathematische Erkenntnisse selten, wie auch die Mathematik insgesamt ein nicht sehr hohes Ansehen besaß. Eine wesentliche Änderung der Stellung der Mathematik und deren Weiterentwicklung tritt erst in der Renaissance mit der Entfaltung des europäischen Bürgertums in den Städten ein.

4.4.3 Die Verbreitung der indisch-arabischen Schreibweise

Die Bücher *ALGORITHMI, de numero indorum* des Al-Ḫwãrizmi und das *Liber Abaci* des Fibonacci sind einige der Hilfsmittel, durch die im Hochmittelalter die indisch arabischen Zahlen in Europa verbreitet wurden. Ihre gelegentliche Anwendung reicht aber weiter zurück. Sie wurden von Kaufleuten, Diplomaten, Gelehrte, Pilger und Soldaten, die aus Spanien oder dem nahen Osten zurückkamen, mitgebracht. Die älteste europäische Handschrift des europäischen Raumes, das diese Zahlen enthält, der *“Codex Vigilianus”*, wurde 976 in Spanien geschrieben. Trotzdem dauerte es recht lange, bis sich diese Zahlen gegen die griechische oder römische Schreibweise durchgesetzt hatten.

Man verwendete zum Rechnen meistens den *“Abacus”*, einem Rechenbrett mit Rechenplättchen oder Steinchen. Römische Zahlzeichen wurden verwendet, um Zwischenergebnisse und Ergebnisse festzuhalten. Das ganze Mittelalter hindurch sind in den Hauptbüchern der Kaufleute römische Zahlen zu finden, ein Hinweis, dass der Abacus als Rechenhilfsmittel verwendet wurde.

Die Verwendung der arabischen Ziffern stieß deshalb auf Widerstand, weil dadurch die Handelsbücher zunächst ja schwieriger zu lesen waren. In den Statuten der *“Arte* *del Cambio"* aus dem Jahre 1299 wurde den Bankiers von Florenz die Verwendung der arabischen Ziffern verboten, sie mussten römische Zahlzeichen verwenden. Erst im Laufe des 14. Jhdt. bürgerten sich langsam die arabischen Ziffern in Europa ein.

Abbildung 12: Auf diesem Bild aus dem frühen 16.Jhdt. rechnet ein Mann auf einer Art Abakus ("auf den Linien"), der andere mit den indisch-arabischen Zahlen. Dieses erstmals 1503 in Freiburg gedruckte Werk des Karthäuserpriors Gregor Reisch (1475-1523) ist eine Art Enzyklopädie, und in einem Zwiegespräch zwischen Lehrer und Schüler werden die sieben freien Künste behandelt. Dieses Buch wurde noch öfters neu gedruckt und ist insbesondere durch seine Illustrationen bekannt. (Aus [11], Seite 27).

5 Mathematik ab der Renaissance

5.1 Mathematik in der Renaissance

Neue Technologien bedürfen neuer Theorien. Neue Gesellschaftsformen bewirken neue Geisteshaltung: das Ansteigen des Einflusses des Bürgertums (Handwerker, Händler) initiiert neue Bildungseinrichtungen. Was ist neu:

- Buchdruck mit beweglichen Lettern
- Geld zur Bezahlung von Waren
- Verstärkung des Handelsaustausches, Erweiterung des geographischen Horizontes, Entwicklung von Navigationshilfen
- Neue Strömungen in der darstellenden Kunst (perspektivische Darstellungen)

Zunächst bemühte man sich um das (Wieder-) Kennenlernen der wissenschaftlichen und kulturellen Werke der Antike des *"Goldenen Zeitalters"* und deren *"Wiedergeburt" (RENAISSANCE)* durch die *"Humanisten"* als Gegenbewegung zur Scholastik. Im Zuge dieser Wiedergeburt musste es zu neuen Erkenntnissen kommen, da ja ein bloßes Übernehmen den Anforderungen der Zeit nicht gerecht werden konnte. Diese Neuentdeckungen spornten zu neuem Forschen an, die Zeit war reif dafür!

Am Beginn des 17. Jhdt. wurden die Grundlagen unseres naturwissenschaftlichen Weltbildes gelegt. Träger dieser Wissenschaften waren die zunächst aus kirchlichen Schulen hervorgegangenen Universitäten aber auch gebildete Bürger (Laien) in den diversen Handelsstädten Nord-, Mittel- und Südeuropas.

5.1.1 Bildnerische Kunst

Im Laufe des 15. Jhdt. bildeten sich perspektivische Darstellungen in der Malerei und Reliefkunst heraus. Maler wie Giotto (1267 – 1336) waren Voräufer dafür, Architekten wie Filippo Brunelleschi (1377 – 1446) machten Experimente mit der Perspektive. Maler wurden auch zu Theoretikern, wie etwa:

- Piero della Francesca (∼ 1416 – 1492). Er war nicht nur ein Maler ersten Ranges, sondern auch Verfasser mathematischer Bücher über *Perspektive, die 5 regulären Körper* und auch über *Arithmetik und Algebra*.
- Albrecht Dürer (1471 – 1528). Von ihm gibt es die *"Underweysung der Messung mit dem zirkel und richtscheyt"*, ein Lehrbuch über geometrische (auch perspektivische) Konstruktionen, die ein Maler oder Steinmetz zu kennen hat.

Mathematiker berieten aber auch Maler:

- Luca Pacioli (1445 – 1517). Er verfasste die *"Summa de Arthmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalità"*, und beriet Leonardo da Vinci der umgekehrt ihm Impulse bei der Erstellung des Buches *"Devina proportione"* gab. Die "Summa" von Pacioli galt über lange Zeit als Referenzbuch für die Rechenmeister der Renaissance.

5.1.2 Trigonometrie

Die Kenntnissse der Araber wurden übernommen und weiter ausgebaut. So wurden z.B. die sog. *“Alfonsinische Tabellen”* (genannt nach dem König Alfons X von Kastilien) um 1272 auf der Grundlage des Ptolemäischen Planetensystems von jüdischen Gelehrten zusammengestellt. Sie beschreiben die Bewegungen von Sonne, Mond und Planeten und dienten zur Navigation aber auch zum Erstellen von Horoskopen und enthalten auch Sinustabellen.

5.1.2.1 Universität Wien. Sie wurde 1365 gegründet. Im 15. Jhdt. wirkten dort drei berühmte Gelehrte.

1. Johannes von Gmunden (~ 1384 bei Gmunden $-1442, Wien$). Er verbesserte die alfonsinischen Tabellen, erfand astronomische Beobachtungsgeräte und war auch Kartograph. Er wird als der “erste Berufsmathematiker” bezeichnet.
2. Georg von Peuerbach (1423 in Peuerbach $-1461, Wien$). Von ihm stammen Lehrbücher über Planetenbewegungen (geozentr. Weltbild), und arithmetische und trigonometrische Schriften und Tabellen.
3. Johannes Müller genannt Regiomontanus, geb. 1436 in Unfinden bei Königsberg (Franken), gest. 1476 in Rom. Auf Anregung seines Lehrers und Freundes Peuerbach beschäftigte er sich mit einer Zusammenstellung und systematischen Ordnung der in antiken, islamistischen und europäischen Schriften verstreuten Ergebnisse, Sätze und Tabellen über Trigonometrie. Es handelt sich um eine erste selbständige und zusammenhängende Darstellung der ebenen und der sphärischen Trigonometrie in Europa, weitreichender als die seiner arabischen Vorgänger. Man kann sagen, dass er damit die Trigonometrie in Europa heimisch gemacht hat.

Kurz nach 1500 gab es noch einen bedeutenden Mathematiker in Wien

- Johannes Stöber aus Steyr. Er beschäftigte sich mit flächentreuen Projektionen (herzförmige) der Erdkugel auf die Ebene.

Danach verfiel die Universität in einen ca. 300 jährigen Dornröschenschlaf (siehe Kaiser[14], S. 34).

5.1.2.2 Prostaphairesis. Aus dem Nachlass von Regiomontanus schöpfte der Pfarrer und Liebhaberastronom Johannes Werner aus Nürnberg (1468 – 1528) viel Wissen über Trigonometrie und er verfasste eigene Werke zur Trigonometrie. Dort findet man die Formel

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

(in unserer heutigen Terminologie ausgedrückt). Dadurch kann also die Multiplikation von zwei Sinuswerten auf Additionen und Subtraktionen zurückgeführt werden. Dieses Verfahren wurde im Laufe der Zeit verfeinert und zur sog. *“Prostaphäretische Rechenmethode”* entwickelt, die bis in das 17. Jhdt. als Grundlage von astronomischen Rechenverfahren diente. Hierzu waren natürlich genauere Winkeltabellen erforderlich wie sie zum Beispiel von Georg Joachim Rhaeticus, geb. 1514 in Feldkirch/Vbg., gest. 1576 in Kaschau(Košice)/Slowakei erstellt wurden.

5.1.2.3 Revolution des astronomischen Weltbildes durch Nicolaus Kopernikus, geb. 1473 in Thorn (Torun/Polen), gest. 1543 in Frauenberg (Frombork/Polen). Kopernikus studierte in Krakau, Bologna, Padua und Ferrara Jus, Medizin und Theologie. Er hatte die Position eines Domherrn in Frauenberg, verbunden mit einem arbeitslosen Einkommen, wo er seit 1510 ständig lebte und dort auch seinen astronomischen Neigungen nachging. Das Manuskript für sein Hauptwerk *"De revolutionibus orbium coelestium"* hatte er bereits 1530 fertig, zögerte aber, es zu veröffentlichen. Sein Schüler G. J. Rhaeticus konnte ihn schließlich zur Veröffentlichung überreden, so dass die *De revolutionibus* 1543 in Nürnberg erschienen. Kopernikus, der auch naturgegebenermaßen Mathematik betrieb, kam aufgrund seiner Kenntnisse der Geometrie, durch eigene astronomische Beobachtungen und auch Beobachtungen anderer zu dem Schluss, dass das ***Heliozentrische System*** für die Astronomie das wesentlich adäquatere Mittel als das geozentrische System wäre. Dieses System wurde ja bereits von Aristarchos von Samos (310-230 v.u.Z.) propagiert. In *De revolutionibus* sind auch viele eigenständige mathematische Sätze enthalten, sowie eine eigene Sinustafel mit einem 10'-Intervall ($r = 10^5$).

In der Folge erlebte Kopernikus's Werk viele Diskussionen. Um seine Hypothesen zu überprüfen, wurde die Trigonometrie weiterentwickelt und feinere trigonometrische Tafeln (u.a. auch durch Rhaeticus) angelegt. Johannes Kepler war ein bedingungsloser Vertreter des Systems von Kopernikus.

De revolutionibus wurde im Jahre 1616 auf den Index gesetzt, nachdem es vorher auch in kirchlichen Kreisen durchaus auch Anerkennung gefunden hatte.

In der Rara- und Inkunablensammlung der Universitätsbibliothek Graz befindet sich ein Manuskript einer deutschsprachigen Übersetzung der *De revolutionibus*. Es handelt sich dabei um eine Übersetzung, verfasst von Raimarus Ursus (1551 – 1600) für den Mathematiker und Uhrmacher Jost Bürgi, der des Lateinischen nicht oder nur sehr wenig mächtig war. Durch P. Guldin (siehe Seite 94) ist diese erste deutschsprachige Übersetzung der *De revolutionibus* an unsere Bibliothek gekommen.[8]

5.1.3 Ausbau der Rechenmethoden

Die Rechenmeister und Cossisten bildeten wie die Handwerker eine eigene Zunft. Man verfasste populäre Bücher über die vier Grundrechnungsarten und zwar in der landesüblichen Sprache. Die Verbreitung des Rechnens geschah im Zusammenhang mit kaufmännischem Rechnen, Buchhaltung, Zinseszinsrechnung etc. Da in diesem Zusammenhang auch lineare Gleichungen behandelt wurden und in diesem Fall auch von einer Unbestimmten = *"cosa"* = *Sache* die Rede war, sprach man von der *"Coß"*, in Analogie zur Hau- Rechnung der Ägypter. Die Coß war also also eine Art Vorläufer der Algebra. Die Gelehrten unter den Rechenmeistern wurden daher auch die *Cossisten* genannt.

Es seien hier drei Rechenmeister bzw. Cossisten angeführt, wobei wohl der zweite der bedeutendste Mathematiker war.

[8] Literatur: Dieter Launert: NICOLAUS REIMERS (Raimarus Ursus), Günstling Rantzaus – Brahes Feind, Leben und Werk. Algorismus, Studien zur Geschichte der Mathematik etc., Inst. f. Geschichte der Naturw. München, Heft 29 (1999).

- ADAM RIES von Staffelstein (1492 – 1559).

  Er führte in Erfurt und Annaberg-Buchholz, Sachsen eine Rechenschule und verfasste mehrere Rechenbücher, die sich mit Rechnen mit dem Abacus aber auch mit den arabischen Ziffern befassten. Das Buch über Ziffernrechnung ist in mindestens 108 Auflagen bis in das 17. Jhdt. nachgedruckt worden. Darüber hinaus hat er auch theoretische Beiträge zur Coß erbracht, die aber nie gedruckt wurden.

  Durch diese Rechenbücher berühmt geworden, sagt man noch heute: "frei nach Adam Riese."[9]

- MICHAEL STIFEL (1487 – 1567). Stifel war Augustinermönch, dann Anhänger der Reformation und Freund Martin Luthers. Er führte ein recht turbulentes Leben.[10] So prophezeite er als Pfarrer der Gemeinde Lochau (jetzt Annaburg, ca. 30 km von der Martin Luther Stadt Wittenberg entfernt) für den 19.10.1533 den Weltuntergang voraus. Diese Prophezeihungen leitete er aus "Wortrechnungen" aus Texten des Neuen Testamentes ab. Am vorausgesagten Tage erwartete die in der Kirche versammelte Gemeinde den Untergang, nachdem sie auf Anregung von Stifel ihr Vermögen durchgebracht haben. Das Ganze endete mit Schmach und Arrest für M. Stifel, wobei er glimpflich davon kam, weil er mit MARTIN LUTHER befreundet war. Stifel schrieb das Buch *"Arithmetica integra"* (Nürnberg 1544), ein bedeutendes Werk, das Stifel über die anderen Cossisten stellt und im nachfolgenden der Mathematik viele Impulse gab. Negative Zahlen waren jetzt gleichberechtigt, auch als Exponenten wurden sie zugelassen. Er legte damit den Grundstein für die Logarithmen. Bürgi und Napier, die Entdecker der Logarithmen sind nachweislich von M. Stifel angeregt worden. Bei Stifel findet man noch (in lateinischer Sprache) für die Null das Wort *"cifra"*. In der Arithmetica integra werden auch *magische Quadrate* behandelt.

- ROBERT RECORDE $\sim$ 1510 – 1558, London. Arzt und Mathematiker. In seinem Werk "Whetstone of Witte" (Wetzstein des Wissens) verwendet er schon algebraische Zeichen, indizierte Variable und vermutlich als Erster das Gleichheitszeichen =.

5.1.4 Algebra

5.1.4.1 Gleichungen 3-ten und 4-ten Grades. Mit den Gleichungen 3-ten und 4-ten Grades sind vier Namen eng verbunden:

- GIROLAMO CARDANO (1501 – 1576), Mediziner, Mathematiker und Naturwissenschaftler, *Cardanosche Formel, Kardanwelle.*
- NICOLÒ TARTAGLIA *"Der Stotterer"*, eigentlich *Nicolò Fontana* ($\sim$ 1500 – 1557), Mathematiker, geb. in Brescia, gest. in Venedig, wo er ein angesehener Rechenmeister war. Formel für die Lösungen der Gleichungen 3-ten Grades, ballistische Werke, Erste Übersetzung der Elemente Euklids in das Italienische, also in eine lebende Sprache.
- LUDOVICO FERRARI (1522 – 1565) Assistent von Cardano. Formel für die Lösungen der Gleichungen 4-ten Grades.
- SCIPIONE DEL FERRO (1465 – 1525) in Bologna. Formel für die Lösungen der Gleichungen 3-ten Grades.

[9] In Holland sagt man "frei nach Bartjens", nach dem Autor eines bekannten holl. Rechenbuches.

[10] Literatur: Karin Reich: *Die Stifel Biographie von Georg Theodor Strobel.* Algorismus, Studien zur Geschichte der Mathematik etc., Inst. f. Geschichte der Naturw. München, Heft 11 (1995).

Zur damaligen Zeit war es manchmal üblich in Rechenwettbewerben sein mathematisches Können unter Beweis zu stellen. Hier fiel N. Tartaglia dadurch auf, dass er Gleichungen 3-ten Grades berechnen konnte. In der *Summa* von Luca Pacioli galten diese als "unauflösbar". Unter dem Siegel der Verschwiegenheit teilte er im Jahre 1539 dem rührigen Mediziner und Mathematiker G. Cardano, der ihn auf das dringlichste über das Geheimnis der Formel befragte, die dabei verwendete Methode mit und zwar in verschlüsselter Form. Cardano besprach dieses Verfahren mit seinem begabten Schüler und Assistenten L. Ferrari, der es auch mit Erfolg auf Gleichungen 4-ten Grades anwendete und eine Formel für deren Lösungen fand. Nun war aber das Problem des Versprechens an Tartaglia, so dass man Ferraris sensationelle Errungenschaft auch nicht veröffentlichen konnte. Dann kam aber die Entdeckung: vor mehreren Jahren (1515) hatte bereits Scipio del Ferro in Bologna die gleiche Methode zur Lösung von Gleichungen 3-ten Grades entdeckt und auch in einem Manuskript, das in Bologna erhalten war, niedergeschrieben, allerdings ohne Beweis. Damit fand sich Cardano nicht mehr an das Versprechen der Geheimhaltung verbunden.

So veröffentlichte er sein Werk *Artis Magnæ* in Nürnberg, 1545, übrigens beim selben Verleger, der auch die *Revolutionibus* von Kopernikus und die *Arithmetica integra* von M. Stifel verlegte. In der "Artis Magna" sind die Formeln für die Lösungen der Gleichungen 3-ten und 4-ten Grades, unter voller Nennung der Namen der Entdecker. Trotzdem wurde die Formel für die Lösung der kubischen Gleichung die ***Cardano Formel*** genannt und Cardano wird auch manchmal (zu Unrecht) des Plagiats bezichtigt. Der Roman von Dieter Jörgensen [13], *Der Rechenmeister* beschreibt diese Periode im Leben von Tartaglia sehr anschaulich.

5.1.4.2 Die Cardano Formel, Casus irreducibilis und die komplexen Zahlen.

Eine Gleichung 3-ten Grades kann immer auf die Form

$$x^3 = bx + c,\ \ b, c \in \mathbb{R}$$

transformiert werden. Dafür liefert die *Cardano Formel* als Lösung:

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + w} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - w} \ \text{ mit } \ w = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3},$$

also eine *Quadratwurzel* unter einer *Kubikwurzel*. Hier kann aber der ***Casus irreducibilis*** auftreten. Man betrachte die Gleichung $x^3 = 15x+4$. Sie hat die Lösungen: 4, $\sqrt{3}-2$, $-\sqrt{3}-2$, alles schöne reelle Zahlen. Hier versagt aber die Cardano Formel. Man erhält nämlich durch sie:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

also ungültige Ausdrücke, nämlich Quadratwurzeln aus negativen Zahlen! Man müsste also mit Wurzeln aus negativen Zahlen rechnen können, wie schon Cardano selbst, dem der Casus irreducibilis bekannt war, meinte.

Rafael Bombelli (1526 – 1572) machte es ganz naiv. Er berechnete $\left(2 \pm \sqrt{-1}\right)^3 = 2 \pm \sqrt{-121}$, also ist $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1}$ und somit erhalten wir aus der Cardano Formel

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Der “Casus irreducibilis” zeigt, dass das Rechnen mit Wurzeln mit negativen Zahlen nicht nur sinnvoll, sondern auch notwendig ist, um die Lösung von gewissen kubischen Gleichungen zu berechnen. Dieser Fall tritt nämlich sehr häufig auf, nämlich immer dann, wenn alle 3 Lösungen der kubischen Gleichung reell sind. Der Casus irreducibilis war also der Auslöser dafür, dass die *komplexen Zahlen* eingeführt wurden. Bombielli rechnete einfach schon so mit den komplexen Zahlen der Form $a \pm \sqrt{-b}$, $a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0$, wie wir es jetzt machen, allerdings ohne arithmetische Formelschreibweise.

Manche Mathematiker, wie etwa Simon Stevin (1546 – 1620), ein Niederländer, der die Dezimalbrüche in Europa einführte, lehnten komplexe Zahlen strikt ab, weil sie angeblich nicht dazu dienlich wären, reelle Lösungen zu finden.

Albert Girard (1595 – 1632), ebenfalls aus der Niederlande, gibt eine erste Fassung des “Fundamentalsatzes der Algebra”, lässt (notgedrungenermaßen) komplexe Lösungen zu, wegen “der Gültikeit der allgemeinen Regeln und deren Nützlichkeit im Rechnen.”

René Descartes ((1569 – 1650) dagegen verteidigt sie. *“Man kann sich bei jeder Gleichung soviele Lösungen vorstellen (imaginer), wie ihr Grad angibt, aber manchmal gibt es keine Größe die dem entspricht, was man sich vorstellt.”* Gewisse Zahlen sind also nicht real, sondern *“imaginär.”*

Etwa seit dieser Zeit wird mit Wurzeln aus negativen Zahlen bedenkenlos gerechnet. So beweist Abraham de Moivre (1667 – 1754) um 1730 die nach ihm benannte Formel

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\cos n\alpha \pm \sqrt{-1}\sin n\alpha\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\left(\cos n\alpha \pm \sqrt{-1}\sin n\alpha\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Leonhard Euler (15.4.1707, Basel - 18.9.1783, St. Petersburg) führte um 1777 das Symbol i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ ein. Euler zeigte, dass die Menge der Zahlen $a + ib$ bezüglich der 4 Grundrechnungsarten abgeschlossen ist und auch Wurzelziehen und Logarithmieren in diesem Bereich möglich ist.
Von *Euler* stammen (um 1748) die Formeln

$$(\cos\varphi \pm\ i\ \sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm\ i\ \sin n\varphi,$$

die heute als Moivresche Formeln bekannt sind. Euler hat sie, aus der berühmten Formel

$$e^{\,i\cdot\varphi} = \cos\varphi + \ i\ \cdot\sin\varphi$$

mittels $e^{in\,\varphi} = (e^{i\varphi})^n$ hergeleitet.

Euler rechnete auf eine virtuose Art mit den komplexen Zahlen, führte immerhin als erster die Logarithmen von komplexen Zahlen ein und vieles andere mehr. Auf Euler gehen sehr viele der heute verwendeten Notationen der Mathematik zurück.

So wurden die komplexen Zahlen in der Mathematik heimisch, aber erst

Carl Friedrich Gauss (30.4.1777, Braunschweig - 23.2.1855, Göttingen, Mathematiker, Astronom, Geodät, Physiker; Beiträge zur Zahlentheorie, Theorie der algebraischen Gleichungen, nichteuklidischen Geometrie, Analysis, Ausgleichsrechnung in Zusammenhang mit Astronomie und Erdvermessung, Potentialtheorie, Elektromagnetismus, Konstruktion eines elektromagnetischen Telegraphen) erbrachte eine Klärung der mathematisch-begrifflichen Schwierigkeiten im Zusammenhang mit den komplexen Zahlen und zwar auf geometrische Weise mittels der *"Gaußschen Zahlenebene"*.

5.2 Weiterentwicklung der Theorie der alg. Gleichungen

Mit den Gleichungen 3-ten und 4-ten Grades wurde ein großer Fortschritt in der Theorie der algebraischen Gleichungen, also der Algebra gewonnen. Um nun weiter zu kommen, mussten neue Werkzeuge entwickelt werden. Zwar wurden schon Fachausdrücke für Quadratwurzel, Kubikwurzel usw eingeführt, auch für Addition, Multiplikation usw. wurden Kurzwörter eingeführt. Ein erster großer Schritt zur Formelschreibweise erbrachte

5.2.0.3 François Vieta (1540 – 1603), ein französischer Jurist. Er entwickelte die Buchstabenalgebra (die ansatzweise schon vorher benutzt wurde):

- Unbekannte und ihre Potenzen (bereits bei Diophantos)

$$A, E, I, O, U, Y$$

- Bekannte Größen durch Buchstaben: $B, C, D, \ldots$
- Operationssymbole +, -, Bruchstrich, aber auch *"plus"*, *"Minus"*, für Multiplikation: *"in"* und Gleichheit *"aequare"* in der grammatisch richtigen Form
- Klammern oder überstreichen

Beispiele: a.) Den Ausdruck

$$\frac{B \cdot A}{D} + \frac{B \cdot A - B \cdot H}{F} = B$$

schreibt Vieta in der Form

$$\frac{B \ \text{in} \ A}{D} + \left\{ \frac{\begin{array}{ccc} B & \text{in} & A \\ -B & \text{in} & H \end{array}}{F} \right\} \ \text{aequale} \ B$$

b.) $B \cdot A^2 + D \cdot A = Z$ lautet

$$B \ \text{ in } \ A \ \text{ Quadratum, plus } \ D \ \text{ plano in } \ A, \text{ aequari } \ Z \ \text{ solido.}$$

Damit also die euklidisch-geometrische Exaktheit eingehalten wird, ist D als Fläche und Z als Körper deklariert.

Vieta führte mit dieser Formelschreibweise Transformationen von Gleichungen durch neu eingeführte Variable, Rationalmachen der Nenner usw. durch und erhielt mehr Klarheit über die Struktur von Gleichungen, insbesondere im Fall des *Casus irreducibilis.* Bekannt ist der nach ihm benannte *"Wurzelsatz von Vieta"*: Hat die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

die Wurzeln x_1, x_2, dann gilt

$$p = -(x_1 + x_2),\ q = x_1 \cdot x_2.$$

und dessen Verallgemeinerung auf Gleichungen höheren Grades.

5.2.1 Anzahl der Wurzeln, Hauptsatz der Algebra

Im 17. Jhdt. kam langsam die Erkenntnis auf, dass eine algebraische Gleichung nicht mehr Wurzeln besitzen könne, als ihr Grad beträgt (Girard, Descartes). Allerdings fand man noch keinen Beweis dafür. Beweisversuche von d' Alembert um 1746 und sogar von L. Euler um 1750 sind unvollständig. Erst C.F. Gauss lieferte in seiner Dissertation 1799 einen ersten exakten und erhellenden Beweis im sogenannten

Hauptsatz der Algebra: *Zu jeder Gleichung*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n,\ a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} \quad \textit{oder auch} \quad \mathbb{C}$$

existieren komplexe Zahlen $x_1, ..., x_n$ *mit*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n).$$

Die Zahlen $x_1, ..., x_n$ *sind also die einzigen Wurzeln der gegebenen Gleichung.*

Ganz zufrieden war Gauß aber mit dem Beweis von 1799 noch nicht. Er gab im Laufe seines Lebens noch drei weitere Beweise dazu. In all diesen Beweisen war aber eine Lücke, die erst im Jahre 1815 durch Bernard Bolzano (1781 – 1848) durch seinen *"Zwischenwertsatz"* geschlossen werden konnte.

Gauß hat, wie erwähnt, das Rechnen mit komplexen Zahlen auf eine solide mathematische Basis gebracht. So hat er die n-ten Einheitswurzeln, d.h. die Lösungen der *"Kreisteilungsgleichung"*

$$x^n - 1 = 0,$$

die die Gruppe der *"Einheitswurzeln"* der Form $e^{2\pi ik/n}$, $k = 1, ..., n$ bilden, genau untersucht. Damit kam er auf das Rechnen mit *"Restklassen"*, also endlichen Gruppen. Auch viele Sätze aus der Theorie der Polynome gehen auf ihn zurück.

Auch auf anderen Gebieten der Mathematik (Potentialtheorie, nichteuklidischer Geometrie, Analysis, angewandter Mathematik), der Physik, Astronomie und Geodäsie war Gauß mit allergrößtem Erfolg tätig.

5.2.2 Auflösung von Gleichungen durch Radikale

Es ging nun darum, auch für algebraische Gleichungen höheren Grades zur Cardano Formel analoge Formeln für die Lösungen zu finden. Das heißt, man wollte die Gleichungen *"durch **Radikale** lösen."*

Eine Gleichung der Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0, \; n > 1$$

kann man durch die Substitution $x = y - \frac{a_1}{n}$ immer auf die Form

$$y^n + b_2 x^{n-2} + ... + b_n = 0$$

bringen. Es kann nun versucht werden, weitere Transformationen durchzuführen, sodass die ursprüngliche Gleichung auf die Form einer *"reinen Gleichung"*

$$z^n - c = 0$$

gebracht wird. Deren Lösungen kann man durch n-te Wurzeln aus c und (komplexe) Einheitswurzeln darstellen. Die Lösungen der ursprünglichen Gleichung erhielte man dann durch ineinander verschachtelte rationale Ausdrücke von Wurzelausdrücken der Koeffizienten der zu lösenden Gleichung, ähnlich zu den Formeln für die Wurzeln von gleichungen 2., 3. und 4. Grades. Man erhält also eine *"Auflösung der Gleichung durch Radikale."*

Es seien einige Namen in diesem Zusammenhang genannt:

- Ehrenfried Walther von Tschirnhausen (1651 – 1708). Er war Privatgelehrter in Dresden, wirkte bei der Entdeckung der Porzellanproduktion mit und erfand die raffiniertesten Transformationen, um Gleichungen zu vereinfachen (Tschirnhausen Transformationen).
- Gauss vermutete bereits um 1799/1801, dass es wohl unmöglich wäre, Radikalausdrücke für die allgemeine Lösung von Gleichungen 5-ten und höheren Grades zu finden.
- Joseph Lous Lagrange (1736, Turin – 1813 Paris). Er untersuchte und analysierte die Formeln für die Lösungen von Gleichungen 3-ten und 4-ten Grades und hier insbesondere rationale Funktionen der Wurzeln und deren Verhalten bei Permutationen der Wurzeln. Hier legte er Grundlagen, auf denen dann E. Galois aufbauen konnte. Lagrange verfasste auch grundlegende Arbeiten zur Himmelsmechanik, Infinitesimalrechnung und zur analytischen Mechanik.
- Paolo Ruffini (1765 – 1822) bewies 1799 die Unmöglichkeit einer Radikaldarstellung der Wurzeln der allgemeinen Gleichung 5-ten Grades. Dabei spielten ebenfalls Permutationen der Wurzeln der betrachteten Gleichung eine Rolle.
- Niels Henrik Abel (1802 – 1829) (Norwegen). Von ihm stammt der Beweis, dass die allgemeine Gleichung n-ten Grades ($n \geq 5$) *nicht durch Radikale auflösbar ist.* Dabei verwendete er ebenfalls Permutationen der Wurzeln, deren gruppentheoretische Eigenschaften (obwohl zu der Zeit von einer Gruppe im heutigen mathematischen Sinne noch gar nicht die Rede war) und hier inbesondere Untersuchungen über die Vertauschbarkeit von Permutationen. Daher kommt der Name *"abelsche Gruppe."* Abel ist aber auch wegen anderer fundamentaler Arbeiten aus dem Gebiet der unendlichen Reihen, Analysis und speziell über elliptische Funktionen und über Funktionalgleichungen zu erwähnen. Abel starb in jungen Jahren an Tuberkulose.

5.2.3 Galoistheorie

Eine abschließende vollständige Klärung des Problems der Frage nach der Auflösbarkeit von algebraischen Gleichungen erbrachte dann Evariste Galois in der nach ihm benannten Galoistheorie. Diese Theorie ist ein Meilenstein in der Theorie der algebraischen Gleichungen und bewirkte eine Revolution in der Algebra. Man kann von einem "Paradigmenwechsel" in der Mathematik sprechen. Das kurze Leben von Evariste Galois allerdings verlief äußerst dramatisch und endete leider überaus tragisch. Das nebenstehende Bild zeigt Galois im Alter von 15 Jahren.

5.2.3.1 Evariste Galois (1811 – 1832) zeigte schon in frühen Jahren Interesse an den schwierigsten mathematischen Werken. Trotzdem bestand er nicht die Aufnahmeprüfung zur berühmten *Ecole Polytechnique* in Paris. Schließlich fand er in seiner alten Schule dem *Lycée Louis-le-Grand* in einem seiner Lehrer einen Förderer, der ihn mit den Werken von Legendre, Gauß, Lagrange und Cauchy bekannt machte. So hatte Galois schon mit 17 Jahren die Grundzüge seiner Theorie über algebraische Gleichungen entwickelt. Im Jahr 1829 reichte Galois zwei Manuskripte bei der Akademie der Wissenschaften in Paris ein, wo sie von Augustin Lous Cauchy, 1789 – 1857, begutachtet werden sollten. Cauchy sollte bereits die Arbeiten des jungen Abel begutachten, hatte diese aber so lange liegengelassen und vergessen, sodass Abel seinen eigenen Ruhm nicht mehr erlebte. So konnte auch Galois die Werke von Abel nicht kennen und ihm ging es mit Cauchy ebenso schlecht. Cauchy verzögerte die Begutachtung, vermutlich weil er die Manuskripte verlor. 1830 reichte Galois wieder eine Arbeit bei der Akademie ein. Auch dieses Mal hatte Galois Pech. Fourier[11] sollte die Arbeit begutachten, nahm sie mit nach Hause und starb einige Wochen später. Alle drei Manuskripte sind bis heute verschollen.

Eine weitere Arbeit von Galois mit dem Titel *"Memoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux"* wurde 1831 abgelehnt, da sie unverständlich schien. Poisson[12] schrieb: *"Der Autor sagt, dass diese Behauptungen Teil einer ganzen Theorie mit vielen Anwendungen sei. Man sollte warten, bis der Autor sein Werk als ganzes zur Publikation vorlegt."*

Dazu sollte es aber nicht mehr kommen. Am 31. Mai 1832 starb E. Galois in Folge einer Verletzung bei einem Duell. Er selbst schrieb: *"Je meurs victime d'une infâme coquette."* Man muss allerdings annehmen, dass ihm dieses Duell aus politischen Gründen aufgezwungen wurde. Galois war Antimonarchist und wegen politischer Agitation zweimal im Gefängnis.

Am Vorabend zu seinem Duell (er war sich sicher, dass er dabei sterben müsse) schrieb er mehrere Briefe, darunter auch einen an seinen Freund Auguste Chevalier, in dem er noch einmal die Grundzüge seiner Theorie über algebraische Gleichungen zusammenfasste und auch neue Theoreme und Vermutungen hinzufügte. *"Ich habe nicht genügend Zeit*

[11] Jean Baptiste Fourier, 1768 – 1830, Arbeiten über trigonometrische Reihen.
[12] Siméon-Denis Poisson, 1781 – 1840, Beiträge zu Differentialgleichungen und Potentialtheorie.

und meine Ideen sind noch nicht genügend gut ausgearbeitet. ... Frage Jacobi[13] *und Gauß öffentlich um ihre Meinung, nicht um die Richtigkeit sondern um die Wichtigkeit dieser Theoreme."*

Erst 14 Jahre danach, 1846 wurden die mathematischen Schriften von Galois durch Joseph Liouville (1809 – 1882) gedruckt herausgegeben. Liouville selbst ist durch bedeutende Beiträge in der Funktionentheorie, Differentialgeometrie, mathematischen Statistik und der Theorie der Differentialgleichungen bekannt geworden.

5.2.3.2 Mathematische Leistungen von E. Galois:

- In seiner Arbeit *"Sur la théorie des nombres"*, 1830, betrachtet Galois in Verallgemeinerung der Gaußschen Kongruenzrechnung irreduzible Gleichungen modulo einer Primzahl. Der wirkliche Inhalt dieser Arbeit ist aber eine vollständige Theorie der *endlichen Körper*, die nun zu Recht den Namen *"Galoisfelder"* tragen (*field, math.engl.=Körper*).
- Die Struktur von *Permutationsgruppen, Normalteiler.* Dies als Hilfsmittel für:
- *Galoistheorie.* Jeder algebraischen Gleichung n-ten Grades wird eine Permutationsgruppe, und zwar eine Untergruppe aller Permutationen der Wurzeln dieser Gleichung zugeordnet, die sogenannte *"Galoisgrppe"* der Gleichung. Aus der Struktur der Gruppe kann man ablesen, ob diese Gleichung durch Radikale lösbar ist oder nicht. Damit wurde ein seit Jahrhunderten offenes Problem vollständig gelöst.

Die Galoistheorie setzte somit dem vergeblichen Suchen nach Lösungsformeln für die allgemeinen Gleichungen höheren Grades ein Ende und öffnete dabei Türen zu völlig neuen wichtigen Disziplinen in der Algebra (Gruppentheorie, Körpertheorie usw.), ja sogar in anderen Disziplinen der Mathematik (Galoisgruppen von Differentialgleichungen, Galoiskorrespondenzen auf abstrakten Strukturen etc.).

5.2.4 Weiterentwicklung in der Gruppentheorie

Im Zuge der Ausarbeitung der Skizzen und Ideen von E. Galois zur Gleichungstheorie kam es zu neuen Erkenntnissen und Entwicklungen in vielen Gebieten der Algebra, ja die eigentliche *Algebra* und deren Teildisziplinen wie die *"Gruppentheorie"* wurden damit erst aus der Wiege gehoben.

- Camille Jordan (1838 – 1922) gab eine erste vollständige Zusammenfassung der Galoistheorie, Eigenschaften von Permutationsgruppen (z.B. Transitivität), Darstellung von Gruppen durch andere Gruppen, Quotientengruppen nach Normalteilern, den *Satz von Jordan–Hölder* über Kompositionsreihen von endlichen Gruppen (von Jordan stammt die Entdeckung der Invarianz der Ordnung der Kompositionsfaktoren, von Hölder deren Isomorphie). Jordan untersuchte auch unendliche Gruppen.
- Arthur Cayley (1821–1895) führte 1854 *abstrakte Gruppen* mittels *Verknüpfungstafeln* ein. Vorher verstand man unter Gruppen fast immer nur Untergruppen der Gruppe aller Permutationen von endlich vielen Elementen.

[13] Carl-Gustav Jacobi, 1804 – 1851, Mathematiker in Berlin, Beiträge über elliptische Funktionen, Differentialgleichungen und Zahlentheorie.

Gruppen spielten immer mehr eine ungewöhnlich glückliche Rolle in Analysis, Geometrie, Mechanik und der theoretischen Physik. Daher widmeten sich immer mehr Mathematiker dem Problem um eine theoretische Fundierung und Axiomatisierung. Hier sei vor allem die deutsche mathematische Schule hervorgehoben mit Richard Dedekind (1831–1916), David Hilbert (1862–1943) beginnend, dann Ernst Steinitz (1871–1928) und später Emmi Noether (1882 – 1935), Emil Artin (1898 – 1962), Helmut Hasse (1898 – 1979), Wolfgang Krull (1899 – 1971) und B.L. van der Waerden (1903 – 1995), der aufbauend auf Vorlesungen von Emmi Noether das Lehrbuch *Moderne Algebra* (1. Auflage 1930 in 2 Bänden) verfasste.

5.3 Rechenhilfen

Wir haben im Abschnitt 5.1.2.2 schon von der *"prostaphairetischen Rechenmethode"* gehört. Sie wurde auch von führenden Astronomen wie etwa Tycho Brahe (1546–1601) verwendet. Um bzw. nach 1600 wurde durch zwei Hobbymathematiker, unabhängig voneinander eine neue einfachere Rechenmethode entdeckt, nämlich:

5.3.1 Die Logarithmen

Die Rechenmethode mittels der Logarithmen beruht auf der Grundlage der Funktionalgleichung[14]

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \ x, y \in (0, \infty). \tag{8}$$

Jede stetige Lösung dieser sog. ***logarithmischen Funktionalgleichung*** hat die Form $f(x) = c \cdot \log(x)$, $c \in \mathbb{R}$, wobei hier $y = \log(x)$ oder auch $\ln(x)$ der *"natürliche Logarithmus"*, d.h. der *"Logarithmus zur Basis"* $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.7182818285 \cdots$, die *Umkehrfunktion* der *Potenzfunktion* $x = e^y$ ist. Allgemein ist der *Logarithmus zur Basis* b, $b > 0$, auch mit ${}_b\log(x)$ bezeichnet, als die Umkehrfunktion der Potenzfunktion b^y definiert. Es gilt: ${}_b\log(x) = c \cdot \log(x)$ mit $c = \log(b)$. Also ist jeder Logarithmus Lösung von (8).

Um nun das Produkt von zwei Zahlen x, y zu berechnen, braucht man also nur deren Logarithmen zu addieren und dann die Zahl zu suchen, deren Logarithmen gleich $\log x + \log y = \log x \cdot y$ beträgt. Ebenso kann man Potenzen und Wurzeln aus den folgenden Identitäten, die man leicht aus (8) folgert, berechnen.

$$\log x^n = n \cdot \log x, \quad \log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.3.1.1 Logarithmentafeln. Tabellen für $\log x$ für $x_0 \le x \le x_1$,(z.B. war in meiner Schulausgabe: Jelínek-Herold, *Fünfstellige Tafeln für den Mathematik-Unterricht, 1957*) der erste Wert $x_0 = 50$ und $x_1 = 1100$. Falls nun $u, v \in [x_0, x_1]$ ist können wir $\log u + \log v = \log(u \cdot v)$ berechnen. Ist nun $\log u + \log v \le \log x_1$ dann können wir aus der Tabelle $u \cdot v$ ablesen. Ansonsten müssen wir von $\log u + \log v$ so oft $\log x_1$ (oder auch einen Wert $\log x_2$ mit $x_0 < x_2 < x_1$) abziehen, bis der so erhaltene Wert innerhalb des Tabellenbereichs liegt. Also bis gilt:

$$\log u + \log v - n \log x_1 = log \frac{u \cdot v}{x_1^n} \le \log x_1.$$

[14] Siehe dazu Gronau[10]

Damit können wir $\frac{u \cdot v}{x_1^n}$ aus der Tabelle ablesen.

Hier zeigt sich der Vorteil des *dekadischen Logarithmus*, also $b = 10$. In diesem Fall kann auch x_1 als Zehnerpotenz gewählt werden, und $\log x_1$ ist eine ganze Zahl, die Korrektursubtraktion ist also sehr einfach.

Geschichtlich gesehen war die wichtigste Erkenntnis die des Additionsgesetzes für Exponenten

$$b^{u+v} = b^u \cdot b^v$$

und Verallgemeinerung von Potenzen b^v auch für nicht natürliche v.

Potenztabellen, denn das sind ja die Logarithmentafeln, wurden bereits bei den Ägyptern und Babyloniern, und später dann bei den Griechen berechnet. Schon Euklid formulierte die Potenzgesetze, z. B.: $a^n : a^m = a^{n-m}$.

Am anregendsten für die Entstehung der Logarithmentafeln war wohl Michael Stifel. In seiner *Arithmetica integra*, Nürnberg 1544, führt er eine Reihe von Potenzen auch mit negativen Exponenten an:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Man kann dies als eine Logarithmentafel für Logarithmen zur Basis 2 und $x_0 = \frac{1}{8} \leq x \leq 64$ betrachten.

Stifel schreibt in seiner *Arithmatica integra*, S. 250 verso: *"Man könnte ein ganz neues Buch über die wunderbaren Eigenschaften dieser Zahlen schreiben, aber ich muss mich an dieser Stelle bescheiden und mit geschlossenen Augen daran vorübergehen"*. Und weiter: *"Addition in der arithmetischen Reihe entspricht der Multiplikation in der geometrischen Reihe, ebenso Subtraktion in jener der Division in dieser. Die einfache Multiplikation bei den arithmetischen Reihen wird zur Multiplikation in sich* (d.h. Potenzierung) *bei der geometrischen Reihe. Die Division in der arithmetischen Reihe ist dem Wurzelausziehen in der geometrischen Reihe zugeordnet, wie die Halbierung dem Quadratwurzelausziehen"* (siehe [Tropfke 1921], p. 171 ff.).

5.3.1.2 Die Logarithmen von Bürgi und Napier.

John Napier (1550−1617)[15] und Jost Bürgi (1552 − 1632),[16] werden allgemein als die "Entdecker der Logarithmen" anerkannt, wobei beiden zugestanden wird, dass sie ihre Entdeckung unabhängig voneinander gemacht haben. Beide Tafeln beruhen auf dem selben mathematischen Prinzip, nämlich einer Tabelle bestehend aus zwei Reihen, einer arithmetischen Reihe:

$$x_n = n \cdot s, \; n = 0, 1, ...$$

[15] John Napier: Mirifici Logarithmorum canonis descriptio, Eusque usus, in utraque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica Mathematica, Authore ac Inventore, IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, Edinburgi 1614.

[16] Jost Bürgi: Arithmetische und Geometrische Progreß Tabulen/ sambt gründlichem unterricht/ wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen/ und verstanden werden sol. Gedruckt/ In der Alten Stadt Prag/ bey Paul Sessen/ der Löblichen Universität Buchdruckern/Im Jahr/ 1620.

und einer geometrischen Reihe:

$$y_n = z \cdot q^n, \ n = 0, 1, ...$$

wobei s, z und q jeweils fest gewählte Konstanten sind. Bürgi nimmt in seiner Tabelle die Konstanten

$$s = 10, \ z = 10^8 \ \text{ and } \ q = 1 + 10^{-4},$$

Napier wählt

$$s = 1 + 0.5 \cdot 10^{-7}, \ z = 10^7 \ \text{ and } \ q = 1 - 10^{-7}.$$

Beide nennen auch ihre Reihen "arithmetische Reihe" und "geometrische Reihe". Napier nennt die Zahl x_n den "Logarithmus" von y_n. Das Wort *Logarithmus* leitet sich also vom lateinischen Wort "logos arithmeticus", also arithmetischer Wert, ab.

Bürgi nennt x_n die "rote Zahl" von y_n. Bei ihm, da er ja auch des Lateinischen nicht mächtig war, kommt das Wort Logarithmus nicht vor.

Die Funktion, die von Napier tabelliert wird, nennen wir sie $L_N(x)$ den *"Napierschen Logarithmus"*, lautet in unserer Notation:

$$L_N(y) = 10^7 \cdot s \cdot \left[\log\left((1-10^{-7})^{10^7}\right)\right]^{-1} \cdot \log\frac{y}{10^7}$$

oder

$$L_N(y) = 10^7 \cdot s \cdot_a \log\frac{y}{10^7}.$$

Hier ist $\log(x)$ der natürliche Logarithmus von x und $_a\log(x)$ der Logarithmus zu Basis a von x, wobei $a = (1-10^{-7})^{10^7}$ also fast gleich zu e^{-1}, der Inversen der Eulerschen Zahl e ist. Denn für e haben wir ja die Darstellung $= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Der Ausdruck $s \cdot \left[\log\left((1-10^{-7})^{10^7}\right)\right]^{-1}$ ist ungefähr -1. Daher erhalten wir

$$L_N(y) \sim 10^7 \cdot \log\frac{10^7}{y}.$$

Der *"Bürgische Logarithmus"* lautet:

$$L_B(y) = 10^5 \cdot \left(\log\left((1+10^{-4})^{10000}\right)\right)^{-1} \cdot \log\frac{y}{10^8}$$

also

$$L_B(y) = 10^5 \cdot_a \log\left(\frac{y}{10^8}\right).$$

Hier ist $a = (1+10^{-4})^{10000}$. Die Zahl $a = 2.71814595\cdots$ ist ungefähr gleich der Eulerschen Zahl $e = 2.7182818285\cdots$. Daher tabellieren Bürgis Progreß Tabulen in etwa den natürlichen Logarithmus. Bürgi beruft sich ausdrücklich auf das Rechnen mit Reihen der Potenzen von 2, und erwähnt in seinem Bericht "SIMON JACOB, MORITIUS ZONS UND ANDERE."

Beide Logarithmentafeln, sowohl die Napiersche als auch die von Bürgi, sowie auch die von Briggs (siehe unten), sind in der Rarasammlung unserer Universitätsbibliothek vorhanden. Sie stammen aus dem Privatbestand von P. Guldin (siehe Seite 94), den er der damaligen Grazer Universität vermacht hat.

5.3.1.3 Die Logarithmen von Johannes Kepler. Während Bürgi und Napier "nur" ein Gesetz, nämlich das Additionsgesetz der Exponenten: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ausnützten, hat Kepler (1571 − 1630) in seinen Logarithmischen Untersuchungen *CHILIAS LOGARITHMORUM, Marpurgi M.DC.XXIV.* und deren Anhang *SUPPLEMENTUM CHILIADIS LOGARITHMORUM, Marpurgi M.DC.XXV.* tatsächlich die logarithmische Funktionalgleichung (8), Seite 78 gelöst.

Die Entstehungsgeschichte dieser *"Logarithmischen Schriften"* ist recht verworren. Sie hängt eng zusammen mit der langwierigen Entstehung der *Rudolphinischen Tafeln*, deren Verfassung Johannes Kepler und Tycho Brahe im Jahre 1601 von Kaiser Rudolf in Auftrag bekamen. Sie sollten die inzwischen veralteten Alfonsinischen Tabellen ersetzen. Die Arbeit dazu verzögerte sich aber immer wieder, nicht nur wegen der Erbstreitigkeiten mit den Nachkommen Tycho Brahes. Johannes Kepler wurde sogar von den Ständen von Oberösterreich bedeutet, dass er die Arbeiten am Fassrechnen (siehe Seite 93) einstellen solle und wichtigere Dinge, wie die Rudolphinischen Tafeln und die Landmappen vollenden möge. Wohl im Gegenzug schrieb Johannes Kepler in einem Bericht im Jahre 1616 an die Stände, dass er die Tafeln "in praxi" fertig habe. Dem war wohl nicht ganz so; denn es sollten sich der Fertigstellung ganz neue Hindernisse in den Weg stellen. Die ursprüngliche Fassung der Rudolphinischen Tafeln waren auf der *prostaphairetischen* Rechenmethode (siehe Abschnitt 5.1.2.2) aufgebaut.

Inzwischen wurde das wesentlich einfachere Rechenverfahren mittels *Logarithmen* durch Jost Bürgi und John Napier entwickelt und die Napierschen Techniken auch in Büchern weiter verbreitet. Johannes Kepler erfuhr im Frühjahr 1617 von Napiers neuen Rechenmethode. Er hatte zwar von Bürgi, mit dem er die Jahre 1605 bis 1612 gemeinsam in Prag verbrachte, und mit dem er auch nachweislich wissenschaftliche Kontakte hatte, mit Sicherheit schon vor dem Erscheinen der Progreß Tabulen (1620) von dessen Methode gehört. So schreibt er dann später in den Rudolphinischen Tafeln, wo er die Napierschen Logarithmen preist, in bezug auf diese: *"Diese logistischen Apices waren es auch, die Jost Bürgi viele Jahre vor der Napierschen Publikation den Weg zu genau diesen Logarithmen gewiesen haben."* Kepler fährt dann aber fort: *"Allerdings hat der Zauderer und Geheimtuer das neugeborene Kind verkommen lassen, statt es zum allgemeinen Nutzen groß zu ziehen."* Sonst nimmt Kepler in den Rudolphinischen Tafeln keinen weiteren Bezug auf Bürgis Logarithmen und erwähnt auch nicht dessen Progreß Tabulen.

Kepler hatte zwar nie die persönliche Bekanntschaft mit Napier gemacht, jedoch die mit seinen Werken, zunächst mit seiner "Descriptio", einer Art Benutzungsanleitung, in die er in den Jahren 1617 bis 1619 immer nur kurzen Einblick hatte. Weiters kam auch noch eine deutschsprachige Version der Napierschen Tabellen im Jahr 1618 auf den Markt, allerdings nur mit 5- statt mit 7-stelligen Tabellen. Kepler muss nun einsehen, dass er nicht umhin kann, die Rudolphinischen Tafeln auf logarithmisches Rechnen umzuschreiben. Allerdings ist er genötigt, die Napierschen Tafeln für seinen Zweck umzuschreiben. Zunächst nur nach der Form, später auch in der Theorie, die ihm vorerst im Unklaren bleibt. Napier motiviert seine Logarithmen auf physikalisch anschauliche Weise. Die eine Zahlenreihe seiner "Logarithmen"-tafel beschreibt die Bewegung eines gleichförmig (d.h. linear) bewegten Punktes *(arithmetische Reihe)*, die andere die eines potenziell bewegten Punktes *(geometrische Reihe)*. Die tabellierte Reihe kann durch die Funktion (wir nennen sie "Napierschen

Logarithmus")

$$L_N(y) \sim 10^7 \cdot \log\left(\frac{10^7}{y}\right)$$

ungefähr beschrieben werden.

Keplers Lehrer Michael Mästlin aus Tübingen, mit dem Kepler über all die Jahre regen Kontakt gepflegt hat, übt heftige Kritik an Napiers Logarithmen und daran, dass Kepler sie einfach so übernehmen wolle. Er schreibt: *"Ich halte es unwürdig eines Mathematikers, mit fremden Augen sehen zu wollen und sich auf Beweise zu stützen oder als solche auszugeben, die er nicht verstehen kann. [...] Deshalb mache ich mir ein Kalkül nicht zu eigen, von dem ich glaube oder annehme, dass er bewiesen sei, sondern nur von einem, von dem ich es weiß."*

Das Ergebnis all dieser Diskussionen ist jedoch nicht nur eine theoretische Begründung der Napierschen Logarithmen, sondern eine **eigenständige Theorie der Funktion** des *natürlichen Logarithmus* $\log(x)$, wie er vorher nicht bekannt war. Er löst nämlich die logaritmische Funktionalgleichung (8), Seite 78, mit der Zusatzbedingung, dass die Lösung im Argument $x = 10^7$ die Ableitung 1 hat (ohne natürllich den Begriff Ableitung zu verwenden). Damit erhält er als Lösung $f(x) = 10^7 \log(x)$. Kepler war also der Erste, der die Logarithmen, insbesondere den natürlichen Logarithmus in der heute verwendeten Art (denn die Vorgänger Bürgi und Napier haben ja nicht direkt Logarithmen angegeben, sondern andere, durch die Funktion des natürl. Logarithmus ausdrückbare Funktionen) als Funktion entdeckt hat. Übrigens geht auch die Abkürzung "log" auf Kepler zurück.

5.3.1.4 Die weitere Entwicklung der Logarithmentafeln.

Henry Briggs (1561–1630), Professor für Geometrie in London und Oxford, lernte die Napierschen Logarithmen um 1614/15 kennen. Er schlug Änderungen vor (nämlich dass der Logarithmus von 10 gleich 1 sein soll), die auf den Logarithmus zur Basis 10, auch ***Briggscher Logarithmus*** genannt, führten. Sie hatten den Vorteil, dass man die Umrechnung der Dezimalstellen und die Reduktion der Zahlen auf den Tabellenbereich leichter durchführen kann.

Kepler erhielt von seinem Freund Gunter(Edmund Gunter, 1581 – 1626, London, Freund von Briggs) ein Buch über die dekadischen Logarithmen. Er schrieb 1623 (die CHILIAS waren schon längst fertiggestellt aber noch nicht gedruckt) an Gunter ([Tropfke, S. 317]): *Wenn es mir möglich ist, will ich jedoch versuchen, die Heptacosias, die ein Bestandteil der Rudolphinischen Tabellen werden soll, mit geringstem Arbeitsaufwand nach Euren* [dekadischen] *Logarithmen umzugestalten.* Doch schließlich, nachdem 1624 Keplers *CHILIAS* gedruckt vorlag, entschied sich Kepler, doch auf die dekadischen Logarithmen zu verzichten. So schreibt dann Briggs an Kepler: *Eurem soeben erschienenen Buch über die Logarithmen anerkenne ich den Scharfsinn und lobe den Fleiß. Hättet Ihr jedoch auf den Erfinder Merchiston gehört und wäret Ihr mir gefolgt, dann hättet Ihr meiner Meinung nach denen, die am Gebrauch der Logarithmen ihre Freude haben, einen besseren Dienst erwiesen.*

Die auf Grundlage der Keplerschen Logarithmen berechneten Rudolphinischen Tafeln mit ihrer weitreichenden Bedeutung in der Astronomie bewirkten ihrerseits, dass die ansonsten durch die dekadischen Logarithmen sehr schnell veralteten Napierschen bzw. Keplerschen Logarithmen noch unverhältnismäßig lange weiterlebten. Sie wurden 1631 von

Keplers Schwiegersohn Jakob Bartsch neu herausgegeben. Obwohl diese Ausgabe viele Fehler enthielt, wurde sie mit Rücksicht auf die Benützbarkeit der Rudolphinischen Tafeln noch 1700 wieder aufgelegt.

An Logarithmentafeln möchte ich noch (aus Patriotismus) diejenigen von Georg Freiherr von Vega (1756 – 1802), Major und Professor der Mathematik beim Kaiserl. königl. Bombardierkorps erwähnen: *"Thesaurus logarithmorum completus"*. Sie sind deshalb erwähnenswert, weil sie das einzige international beachtete Werk mit mathematischem Inhalt sind, das in der Zeit nach Kepler und Guldin bis in die Mitte des 19. Jhdt. (mit Ausnahme der Werke von Janos Bolyai und Bernard Bolzano) in der Österreichischen Monarchie, immerhin einem "Weltreich", erschienen ist.

5.3.1.5 Die weitere Entwicklung der Logarithmen. Ab 1636 gelang Pierre Fermat (1601 – 1665) die Quadratur der höheren Hyperbeln und Parabeln der Form

$$y = ax^m,\ y = \frac{a}{x^m} \ \text{ und } \ y^n = ax^m,\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Er hat dabei in unserer Notation für $y = x^k$ die Formel

$$\int_0^x y^k dy = \frac{x^{k+1}}{k+1},$$

wobei k eine beliebige ganze oder auch gebrochene Zahl sein kann, entdeckt. Dies mit dem Hinweis: lässt man die Obergrenze eine geometrische Reihe durchlaufen, dann bilden die Flächenstücke ebenfalls eine geometrische Reihe. Diese Formel versagt jedoch bei $k = -1$.

Für diesen Fall fand 1630 (veröffentlicht 1647) der Jesuitenpater Gregorius a Santo Vincentio (1584, Brügge – 1669, Gent) eine Lösung [Naux, II, S. 21f.]: *Wenn die Abszissen einer Hyperbel in geometrischer Progression wachsen, dann bilden die Flächen eine arithmetische Progression.* Das führte auf die Logarithmen. Gregorius selbst scheint die Tragweite seiner Entdeckung aber nicht erkannt zu haben. Sein Freund und Mitbruder Alfonso Anton de Sarasa (1618 – 1667) erst nützte dieses Ergebnis aus, um Logarithmen zu berechnen: *Unde hae superficies supplere possunt locum logarithmorum datorum* (Daher können diese Flächen den Platz gegebener Logarithmen ausfüllen).

Die Schlussweise von S. Vincentio und Sarasa kann man folgendermaßen (unter Verwendung heutiger mathematischer Bezeichnungen) wiedergeben (siehe Edwards [5], S. 154f.). Wir betrachten für positive reele Zahlen a und b die Fläche $F_{a,b}$, die zwischen dem von a und b erzeugten Intervall und der Kurve $y = \frac{1}{x}$ liegt, also $F_{a,b} = \int_a^b \frac{1}{x} dx$. S. Vincentio zeigte nun (für $a \leq b$):

$$F_{ta,tb} = F_{a,b} \ \text{ für alle } \ t > 0. \tag{9}$$

Das kann man folgendermaßen beweisen:

Sei o.B.d.A. $a < b$ und $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$ eine äquidistante Einteilung des Intervalls $[a, b]$ Dann gilt die Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_i} < F_{a,b} < \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_{i-1}}. \tag{10}$$

Für $t > 0$ liefert damit $ta = tx_0 < tx_1 < \cdots < tx_n = tb$ eine äquidistante Einteilung des Intervalls $[ta, tb]$. Für $F_{ta,tb}$ gilt nun ebenfalls die Ungleichung (10)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_i} < F_{ta,tb} < \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_{i-1}}.$$

Da in obiger Ungleichung die Differenz zwischen dem ganz linken und dem ganz rechten Term bei wachsendem n beliebig klein gemacht werden kann, muss (9) gelten.

Sarasa erkannte nun, dass aus der Gleichung (9) die logarithmische Funktionalgleichung (ich weiß nicht, ob er sie auch so nannte) für eine bestimmte Flächenfunktion folgt. Definiert man nämlich

$$L(x) := \begin{cases} F_{1,x} & \text{für } x \geq 1 \\ -F_{x,1} & \text{für } 0 < x < 1 \end{cases},$$

dann gilt

$$L(x \cdot y) = L(x) + L(y).$$

So seien z.B. x und y beide größer als 1. Dann gilt:

$$L(xy) = F_{1,xy} = F_{1,x} + F_{x,xy} = F_{1,x} + F_{1,y} = L(x) + L(y).$$

Auch Christiaan Huygens, (1629, Den Haag – 1695, Den Haag) verwendete in seinem Werk *Fundamentum regulae nostrae ad inveniendos logarithmos, 1661* die Hyperbelfläche zur Berechnung von Logarithmen. Später stellte man dann die Hyperbel durch die Gleichung

$$y = \frac{1}{x+1}$$

dar und die Fläche als

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x).$$

Den Bruch $\frac{1}{1+t}$ kann man als Reihe darstellen:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots$$

und diese Reihe lässt sich gliedweise integrieren:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots .$$

(Die gliedweise Integration wurde allerdings erst später durchgeführt. Damals leitete man die Reihe durch Berechnung der Hyperbelsegmente unter Anwendung der *Indivisiblentheorie von Cavalieri* her, siehe [5], S.162). Dies ist die sogenannte "logarithmische Reihe". Sie wurde einerseits in Notizen von Isaac Newton (1643 – 1727) von 1664 erwähnt, andererseits auch bei Nicolaus Mercator (eigentlich Kauffmann, 1620, Eutin – 1687, Paris) in seiner *Logarithmotechnica, London 1668*.[17].

[17] N. Mercator ist nicht zu verwechseln mit dem Geographen Gerhard Merkator (eigentlich Kremer, 1512 – 1569), nach dem die Merkator-Projektion benannt wurde

Noch weitere berühmte Matematiker beschäftigten sich mit den Logarithmen, so diskutierten Leibniz und Johann Bernoulli um 1712/13 über die Logarithmen von negativen Zahlen.

Erst bei Leonhard Euler (1707, Basel – 1783, St. Petersburg) und zwar in seiner *Introductio in Analysis Infinitorum, 1748* findet man die Definition:

Wenn $a^z = y$ ist, so heißt dieser Wert z, sofern er als Funktion von y betrachtet wird, der Logarithmus *von y. Die Lehre von den Logarithmen setzt also voraus, dass eine bestimmte Konstante an der Stelle von a eingesetzt wird, die deshalb die* Basis *der Logarithmen heißt.*

Mit dieser Definition lassen sich auch Logarithmen von komplexen Zahlen einführen. Damit konnte Euler das Problem von Leibniz und Bernoulli lösen: Zu jedem komplexen Numerus gibt es bei gegebener Basis unendlich viele komplexe Werte des Logarithmus.

5.3.1.6 Die Eulersche Zahl $e = 2.718281828459045235360287\cdots$. Wie kam Euler zu der nach ihm benannten Zahl und seiner Exponentialfunktion? Eine Herleitung findet man in der *Introductio in Analysis Infinitorum* (siehe Tropfke, S. 321).

Der heute sogenannte "natüliche Logarithmus" hieß damals "hyperbolischer Logarithmus" weil er eben in der Form $\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ als Fläche eines Abschnittes der Hyperbel $\frac{1}{x}$ gegeben war. Für ihn gilt

$$\log x \cdot y = \log x + \log y \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \log x\Big|_{x=1} = 1.$$

Der hyperbolische Logarithmus muss natürlich auch die Umkehrfunktion von a^x für ein bestimmtes a sein. Gesucht ist eine Zahl, nennen wir sie e, die man für a einsetzen kann, sodass die Ableitung der Funktion a^x an der Stelle $x = 0$ gleich 1 ist. Dann hat nämlich auch die Ableitung der Umkehrfunktion ${}_a\log(y)$ an der Stelle $a^0 = 1$ den Wert 1. Euler argumentiert mit *"unendlich kleinen"* und *"unendlich großen"* Zahlen. So kam er gerade zur Zahl $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.718281828459045235360287\cdots$ (siehe dazu [23], Band 1. Arithmetik und Algebra, 4. Aufl. Seite 321).

5.3.2 Rechenmaschinen.

5.3.2.1 Abaccus, Napiers Rechenstäbchen, Rechenschieber. Der Abaccus wurde in vielen Spielarten verwendet. Im fernen Osten (China, Japan) gab es Rechenbretter, die bis in die 60er Jahre unseres Jahrhunderts noch verwendet wurden. Mit ihnen konnte man addieren, multiplizieren, dividieren und auch wurzelziehen.

John Napier hat Rechenstäbchen aus Holz konstruiert, auf denen Zahlen aufgemalt wurden und durch die man durch Drehen und Verschieben der Hölzer addieren und Multiplizieren kann. Sie haben sich nicht durchgesetzt.

Dagegen wurden im 17. Jhdt. in England ***Rechenschieber*** entwickelt. Sie basieren auf der Eigenschaft der logarithmischen Reihe. Man kann mit ihnen leicht multiplizieren und dividieren. Bis zur Einführung der Taschenrechner waren sie das gängigste Werkzeug eines Ingenieurs.

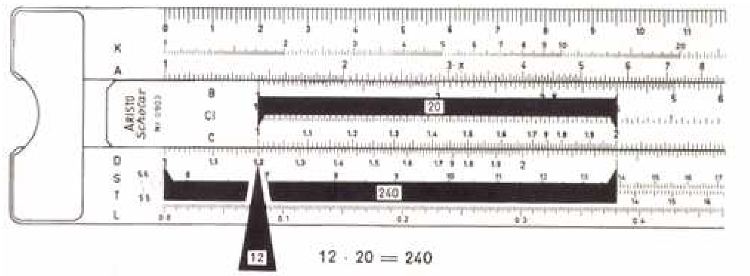
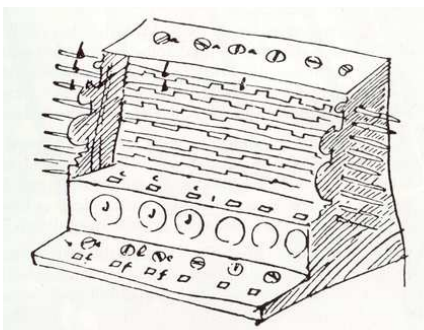


Abbildung 13: *Rechenschieber* Aristo Scholar*, Beispiel einer Rechenstabeinstellung*

5.3.2.2 Mechanische Rechenhilfen. Hier sind vor allem die folgenden Personen anzuführen, die bei den Anfängen der Entwicklung von Rechenmaschinen wesentliche Beiträge geliefert haben.

- Wilhelm Schickhard (1592−1635). Er hat in Tübingen auf Anregung von Johannes Kepler eine Rechenmaschine entwickelt. Diese Maschine war mit Übertragungs-



Skizze der Rechenmaschine von W. Schickard, Beiblatt zu den Berechnungen der Rudolphinischen Tafeln aus dem Kepler Nachlass, Pulkowo-St.Petersburg.

Abbildung 14: *Skizze der Rechenmaschine von W. Schickard.*

werk ausgestattet, konnte damit automatisch addieren und subtrahieren, mittels drehbarer Zahlenzylinder aber auch multiplizieren und dividieren. Vor der Auslieferung nach Linz, der damaligen Wirkungsstätte Keplers, ging die Maschine aber durch Feuer zugrunde. Eine Rekonstruktion der Maschine befindet sich an der Linzer Universität. Darüber kann man bei A. Adam[18], S. 87 f. weiter nachlesen.

- Blaise Pascal (1623 – 1662) konstruierte als kaum 20–jähriger (1642) für seinen Vater, der königl. Steuereinnehmer in Frankreich war, eine mechanische Rechenmaschine, die Addieren und nach Verbesserungen auch Subtrahieren konnte. Insgesamt sollen 50 Maschinen erbaut worden sein, von denen noch ca. 9 Exemplare vorhanden sind. Da diese Geräte recht teuer waren, setzten sie sich zu ihrer Zeit nicht durch.

- G. W. Leibniz (1646 – 1717). Von ihm stammt das Prinzip der *"Staffelwalzenmaschine"*, präsentiert in Paris und London im Jahr 1673. Dieses Prinzip wurde bis zur Einführung der elektronischen Rechenmaschinen bei den ab dem 18. Jhdt. konstruierten Maschinen verwendet. Die Rechenmaschine von Leibnitz beherrschte alle vier Grundrechenarten.

[18] Adam, Adolf: Vom himmlischen Uhrwerk zur statistischen Fabrik. Verlag Herbert O. Munk, Wien 1973.

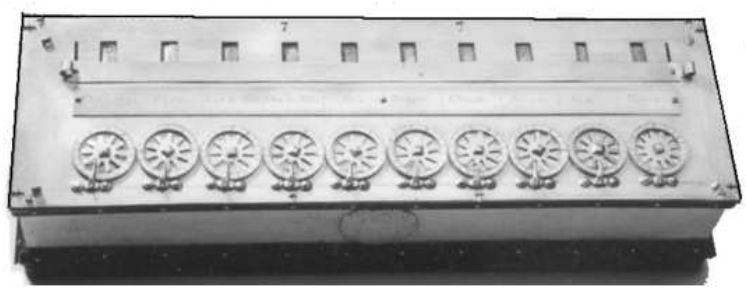


Abbildung 15: *Rechenmaschine von Blaise Pascal*

Erst im Laufe des 19. Jhdts. kam es dann zu serienmäßigen technisch ausgereiften Rechenmaschinen, die alle vier Grundrechnungsarten durchführen konnten.

Zu erwähnen wäre hier noch die handliche Kurbelmaschine namens *"CURTA"*, gebaut von dem Österreicher Curt Herzstark, der aufgrund seiner jüdischen Herkunft im "Dritten Reich" in einem Konzentrationslager gefangen gehalten wurde und dort die Grundideen seiner kleinen handlichen Rechenkurbelmaschine (Spitzname "Kaffeemühle") entwickelte. Nach dem Krieg war Österreich an dieser Erfindung nicht interessiert, so dass diese Maschine bis in die 60-er Jahre in Liechtenstein gebaut und mit großem Erfolg weltweit verkauft wurde. Sie ist ein Meisterwerk der Feinmechanik. Klein genug für jede Hosentasche, war sie schneller, billiger, leiser als alle Rechenmaschinen vorher.

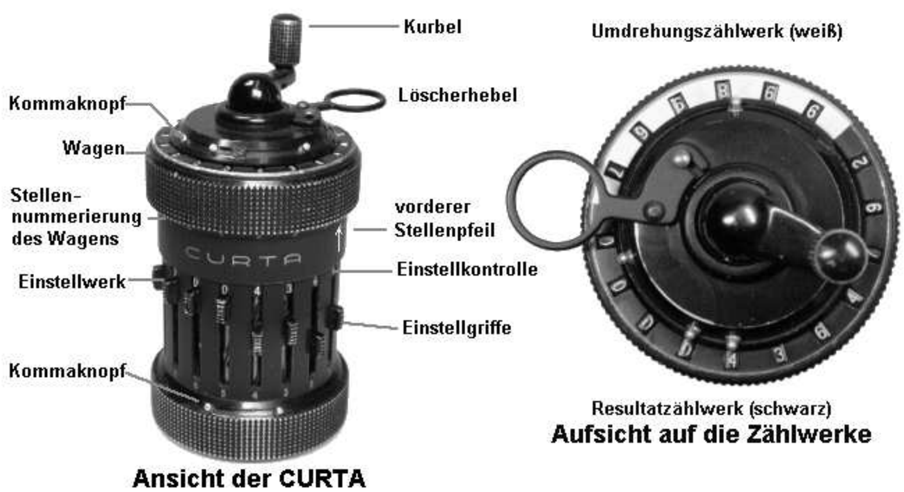


Abbildung 16: *Rechenmaschine "Curta von Curt Herzstark von Curt Herzstark*

5.3.3 Programmgesteuerte Maschinen

5.3.3.1 Jacquard Maschinen (um 1800). Joseph-Marie Jacquard (1752 – 1834) erfand als französischer Seidenweber einen automatischen Webstuhl, der (wie schon Musikautomaten vorher) durch streifenförmige Lochkarten gesteuert wurde. Informationen über das zu webende Muster waren in dem Lochstreifen gespeichert. Dies ist der Beginn der Speicherung von Daten, die mechanisch abgelesen werden konnten.

5.3.3.2 Charles Babbage (1791 – 1871)**.** Babbage studierte in Cambridge Mathematik und veröffentlichte dann auch durchaus wissenschaftlich bedeutende mathematische Schriften (z.B. über die heute so genannte Funktionalgleichung von Babbage). Ab ca. 1830 begann er sich anderen, wie er selbst bemerkte, "nützlicheren" Dingen zuzuwenden. Er beschäftigte sich mit Ökonomie, Wirtschaft und auch ganz praktischen Erfindungen. Ein Großteil seines Lebens widmete er dann der Konstruktion von programmgesteuerten Rechenmaschinen, sowohl was die theoretischen Grundlagen betraf, als auch deren praktische Realisierung. Babbage war ausgebildeter Mathematiker, ihm schwebte eine Rechenanlage vor, die numerische Berechnungen durchführen sollte und damit die großen Tabellenwerke für die trigonometrischen u.a. Funktionen, aber auch Preistablellen, die das damals komplizierte englische Maß- und Münzsystem berücksichtigten, automatisch berechnen sollte. Weiters sollte sie aber auch Formelmanipulationen(!) ausführen können. Erste Modelle wurden immer wieder öffentlich vorgeführt. Seine "Differenzenmaschine" war sogar auf der Weltausstellung in London 1862 ausgestellt. Im Zuge dieser Arbeiten wurden vor allem auch neue Fertigungstechniken in der Feinmechanik entwickelt. Eine komplett funktionierende Maschine wurde mangels größerer Geldmittel jedoch nie gefertigt. Sein Lebenswerk ist gut dokumentiert, insbesondere durch seine Erinnerungen: *Passages from the Life of a Philosopher*. Sein Einfluss auf nachfolgende Generationen von Computerentwicklern wie Alan M. Turing (1912 – 1954), Howard H. Aiken u.a. war bedeutend.

5.3.3.3 Hollerith Maschinen, IBM. Hermann Hollerith (1860 – 1929) erbaute auf dem Prinzip der Jacquardschen Lochkarten beruhende Tabuliermaschinen. Daten wurden auf Lochkarten gespeichert, von der Maschine eingelesen und deren Eintragungen

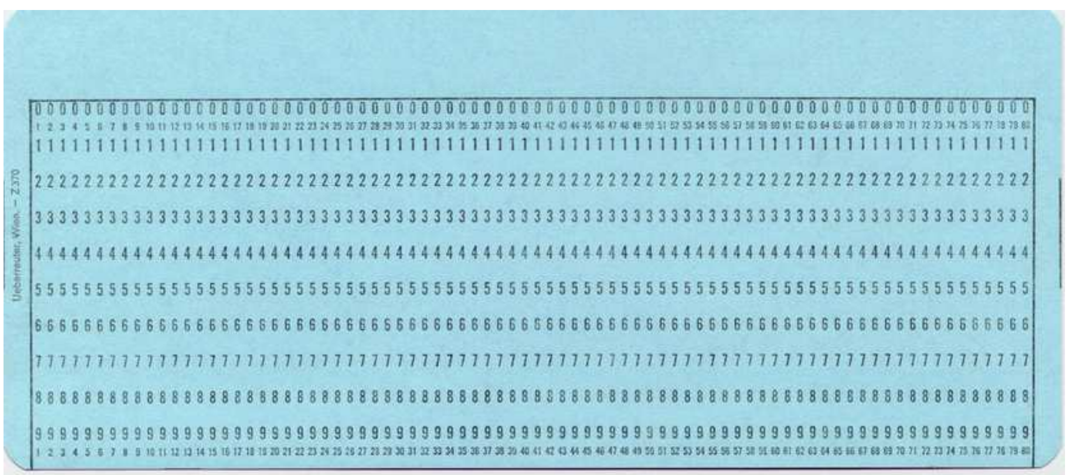


Abbildung 17: *Lochkarte*

weiterverarbeitet. Die Lochkarten konnten auch vorher von eigenen Maschinen nach bestimmten Kriterien sortiert werden. Diese sog. Hollerithmaschinen wurden erstmals 1890 zur Volkszählung in Amerika und im selben Jahr in Österreich als erstes europäisches Land verwendet. Aus der Hollerith Gesellschaft entstand dann die ***IBM*** (International Buisiness Machine Company = Internationale Büromaschinen Gesellschaft). IBM-Hollerithmaschinen wurden bis in die 60-er Jahre in mittleren und größeren Betrieben zur Buchhaltung (Lohnverrechnung, Rechnungslegung etc.) verwendet.

5.3.4 Elektronisch gesteuerte Datenverarbeitungsanlagen (EDV)

5.3.4.1 Erste Generation.

1941 Konrad Zuse, (1910 – 1996) erbaut in Deutschland die erste vollfunktionierende durch Relais und Röhren gesteuerte Rechenmaschine "Z1". Er gründete nach dem 2. Weltkrieg die ZUSE-Werke, in der dann weitere Maschinen gebaut werden (ich habe z.B. um 1965 auf einer "Z23" an der Univerität Innsbruck programmiert). Über Zuses Leben kann man in seiner Autobiographie [29] nachlesen.

1944 Howard H. Aiken (1900 – 1973): Erste amerikanische elektron. gesteuerte Anlage "Mark I" in Zusammenarbeit mit IBM.

ab 1951 Serienmäßige Fertigung von EDV-Anlagen durch UNIVAC u.a.

1954 *"Mailüfterl"*, erste volltransistorisierte EDV-Anlage durch Heinz Zemanek (*1920) in Wien erbaut. Sie stand lange in der Eingangshalle des Institutes für Mathematik der Universität Linz und steht jetzt im Technischen Museum Wien. Zemanek wählte diesen Namen im Kontrast zu den Namen wie "Wirbelwind" oder "Taifun" der amerikanischen Computer.

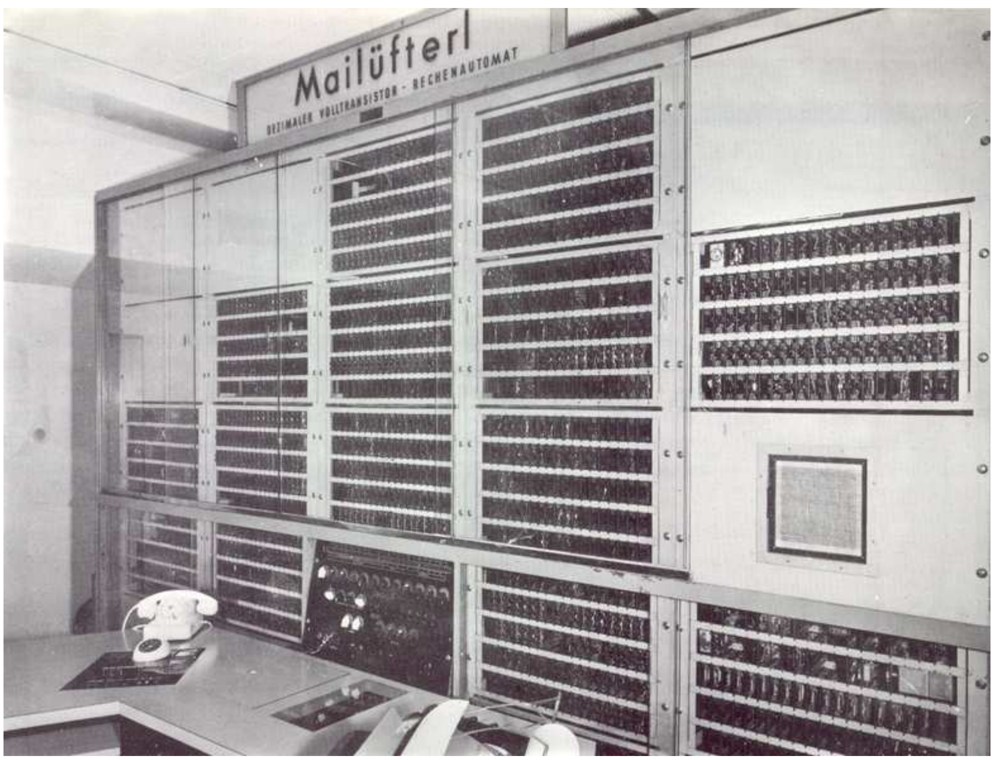


Abbildung 18: *Mailüfterl, der erste volltransistierte Digitalrechner Europas.*

1958 2. Generation mit Transistoren auf dem Markt. Ferritspeicher, 8 KB Speicher benötigen einen Platz in Schrankgröße sowie Klimaanlage.

1964 Modultechnik der 3-ten Generation (z.B. IBM Serie 360).

1970 Integrierte Schaltkreise und Chips anstelle von Ferritkernen für die Speicher.

5.3.4.2 Elektronische Revolution. Durch neue Fertigungstechniken mittels Halbleiter eröffnen sich ganz neue Dimensionen in der Herstellung von Rechenmaschinen:

5.3.4.2.1 Taschenrechner Schon vor dem 2. Weltkrieg gab es handliche (mechanische) Taschenrechner. Die ersten elektronischen Taschenrechner kamen Ende der 60-er Jahre auf den Markt. Im Jahre 1973 kostete so ein Rechner von Hewlett-Packard, der noch nicht einmal die Winkelfunktionen berechnen konnte, in Österreich ca. 14.000,– ÖS (mehr als das damalige Monatsgehalt eine Universitätsassistenten).

5.3.4.2.2 Personal Computer Diese bilden den Beginn der eigentlichen "Elektronischen Revolution", denn sie sollten Computer für den "persönlichen Gebrauch", also für jedermann sein.

1977 Erster Personal Computer APPLE, er kostete 1.298 US $ (durchschnittliches Monatsgehalt eines US-Bürgers) und hatte einen RAM Speicher von 4 KB.

1981 IBM bringt mit Verspätung einen eigenen PC auf den Markt und legt dabei den IBM-Standard für Computer mit dem Betriebssystem MS-DOS fest. Dieser wird in der Folge mehrfach in Billigstform nachgebaut.

Von besonderer Bedeutung für die Mathematik sind hierbei:

- *Mathematische Textverarbeitungsprogramme* wie Scientex, Sigma und Chiwriter (inzwischen hoffnungslos veraltet) sowie Word in den diversesten Versionen und vor allem TeX.
- *Mathematische Hilfsprogramme* sowohl für numerische Berechnungen, wie auch für Formelmanipulationen: Mathlab, Derive, Mapel, Mathematica etc.

  Sie eröffnen völlig neue Dimensionen im Herangehen an die Lösung mathematischer Probleme, können aber nicht das fundierte mathematische Wissen ersetzen.

5.3.4.2.3 Globale Vernetzung im INTERNET. Dieses wurde im Auftrag des DOD (Department of Defense) der USA an verschiedenen Universitäten eingerichtet, um die Kommunikation untereinander zu erleichtern und insbesondere den Datentransfer zwischen Computern zu ermöglichen. Dieses Netz wurde dann weltweit eingesetzt und soll insbesondere während des Golfkrieges (1991) von größter strategischer Bedeutung gewesen sein. Das ***World-Wide-Web*** mit der Programmiersprache HTML ("Hypertext Markup Language" die Sprache des World Wide Web) wurde ab 1989 am CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire), der europäischen Organisation für Kernforschung entwickelt. Für uns bringt es größtmögliche Kommunikation und Austausch von Wissen mittels FTP (File transfer protocoll) und E-mail (ab ca. 1980) und WWW. Der "Erfinder" des WWW, der Brite Tim Berners-Lee wurde im Mai 2001 dadurch geehrt, dass er in die altehrwürdige, 1660 gegründete Royal Society aufgenommen wurde.

Diese neuen revolutionären Errungenschaften in der Kommunikationstechnologie sind durchaus gleichzusetzen der Revolution im Geisteswesen um 1500 mit der Erfindung des beweglichen Letternsatzes durch Gutenberg, mit der Bücher billiger wurden und dadurch Wissen und Bildung für einen viel größeren Kreis von Interessierten zugänglich geworden sind.

5.4 Entwicklung der Infinitesimalrechnung.

5.4.1 Wegbereiter der Infinitesimalrechnung.

5.4.1.1 Johannes Kepler (1571−1630). Er ist in der Tradition der damaligen Universitäten aufgewachsen. Während seines Studiums der Theologie, insbesondere der "Artistenfächer" Astronomie und Mathematik an der Universität Tübingen und am Tübinger Stift (1589-1594) wurde er mit den Werken Euklids, aber auch Aristoteles, Archimedes und vor allem auch (allerdings in Privatseminaren) mit den Lehren von Kopernikus bekannt gemacht. Er war ein voll ausgebildeter Mathematiker, immer treu der Strenge des Schließens *in more geometrico*, d.h. nach den Regeln Euklids und immer aufgeschlossen neue Theorien, wie etwa das Kopernikanische Weltbild oder neue Rechenmethoden, zu erfassen.

Am 10. August 1591 absolvierte er das Magister-Examen. Noch bevor er sein Theologie-Studium abschließen konnte, erhielt Johannes Kepler ein Angebot, am Grazer protestantischen Gymnasium die Position eines Professors für *Mathematik* einzunehmen und zugleich die Stelle eines *Landschaftsmathematikers* zu übernehmen. Johannes Kepler wurde dafür vom Tübinger Senat vorgeschlagen; wohl deshalb, weil er in den theologischen Tübinger Kreisen als ein allzu kritischer Denker galt.

I. Die Grazer Jahre. Am 24. März 1594 verlässt Johannes Kepler endgültig Tübingen und trifft in Graz am 11. April ein. Über seine Erfolge als Kalendermacher soll hier nur soviel berichtet werden, dass einige seiner Prognosen, wie die Vorhersage eines harten Winters und eines Einfalles von Türken, tatsächlich stattfanden, was ihm einen gewisses Ansehen verschafft haben mag. Seine Heirat mit Barbara Müller von Mühleck im Jahre 1597 sei noch erwähnt.

Seine herausragendste wissenschaftliche Leistung in der Grazer Zeit ist sein hier entstandenes Werk *MYSTERIUM COSMOGRAPHICUM, Tubinggae, M.D.XCVI.*[19] Es ist ein astronomisches Buch, ein philosophisches Buch, und auch ein mathematisches Buch. Denn ohne intime Kenntnis mathematischer Forschung wäre dieses Werk nicht entstanden.

Johannes Kepler, der im Innersten von der Gesetzmäßigkeit des Weltenaufbaues überzeugt war, zog aus den Beobachtungen von Kopernikus, dessen Lehre er sich vollständig aneignete und aus seinen eigenen Überlegungen den Schluss, dass es nur die 6 damals bekannten Planeten geben könne:

"Die Erde ist das Maß für alle anderen Bahnen. Ihr umschreibe einen Dodekaeder; die dieses umspannende Sphäre ist der Mars. Der Marsbahn umschreibe ein Tetraeder; die dieses umspannende Sphäre ist der Jupiter. Der Jupiterbahn umschreibe einen Würfel; die diesen umspannende Sphäre ist der Saturn. Nun lege in die Erdbahn ein Ikosaeder; die diesem einbeschriebene Späre ist die Venus. In die Venusbahn lege ein Oktaeder, die diesem einbeschriebene Sphäre ist der Merkur." ... "Da hast Du den Grund für die Anzahl der Planeten.".

Hier vereinigt Johannes Kepler sein astronomisches Wissen (die Abstände der Planeten von der Sonne, nach Kopernikus) mit seinem großen mathematischen Wissen. Er kennt

[19] Der genaue etwas langatmige Titel in deutscher Übersetzung lautet: *"Vorläufer kosmographischer Abhandlungen, enthaltend das WELTGEHEIMNIS* (Mysterium cosmographicum) *über das wunderbare Verhältnis der Himmelskörper und über die angeborenen und eigentlichen Ursachen der Anzahl, der Größe und der periodischen Bewegungen der Himmelskörper, bewiesen durch die fünf regelmäßigen geometrischen Körper."*

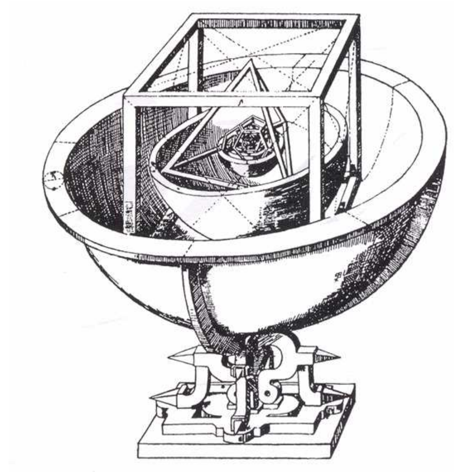


Abbildung 19: *Links: Kepler, 1610 im Alter von 39 Jahren, nach einem Bildnis aus dem Stift Kremsmünster. Rechts: Keplers Planetenmodell aus dem Mysterium cosmographicum.*

die platonischen Körper, deren Anzahl und vermutlich auch den Beweis bei Euklid, dass diese genau 5 beträgt. Dazu muss man sich aber durch die ganzen 13 Bücher der *Elemente von Euklid* durchgekämpft haben. Kepler vergleicht jeweils die Proportionen der Abstände der Planeten von der Sonne (nach Kopernikus) und ordnet die platonischen Körper so an, dass die vorher beschriebenen Radien der Sphären sich in etwa gleich verhalten, wie die Abstände der Planeten. Ein interessantes Detail ist, dass jeweils antipodisch angeordnete Platonische Körper in Keplers Modell zueinander "dual" sind.[20]

Keplers MYSTERIUM COSMOGRAPHICUM brachte ihm auch international großes Ansehen und Anerkennung ein, u.a. von Galileo Galilei, aber auch von Tycho Brahe. Dieser lud ihn zu gemeinsamer Zusammenarbeit ein, nicht zuletzt deshalb, weil er die guten mathematischen Fähigkeiten Keplers hoch schätzte.

Die Situation in Graz wurde in der Zwischenzeit im Zuge der Gegenreformation auch für Johannes Kepler immer unsicherer, obwohl seine Situation zunächst etwas weniger gefährdet war, als die der anderen Protestanten. So bemühte er sich um eine Position bei Tycho Brahe, der inzwischen Hofmathematiker bei Kaiser Rudolf II. in Prag geworden ist und wo Kepler ihn auch besuchte. Im August 1600 musste auch Johannes Kepler Religionsverhöre über sich ergehen lassen und als er sich weigerte, sich zur katholischen Religion zu bekennen, wurde er aus Graz ausgewiesen. Die steiermärkischen Stände bewilligten ihm allerdings noch ein halbes Jahresgehalt und stellten ihm auch das von ihm erbetene Dienstzeugnis aus, in dem man ihm für seine Tätigkeit als Professor großes Lob

[20] Natürlich kann aus heutiger Sicht Keplers Hypothese nur als äußerst spekulativ bezeichnet werden. Sie zeugt aber von dem gerade von Kepler getragenen tiefen Glauben der damaligen Zeit, dass die Welt gänzlich den Gesetzen der Mathematik unterworfen sei. Natürlich konnte Kepler dem Reiz nicht widerstehen, die vermutete Verbindung zwischen den platonischen Körpern und dem Weltgefüge herzustellen. Immerhin hat Keplers These mehr als hundert Jahre gehalten. Nach den seinerzeit bekannten Planeten **Merkur, Venus, Erde, Mars, Juppiter** und **Saturn** wurden die äußeren Planeten erst nach und nach entdeckt. **Uranus** 1781 von William Herschel, **Neptun** 1846 von J.G. Galle, **Pluto** 1930 von C.W. Tombough.

spendete. Am 30. September 1600 verlässt Johannes Kepler mit seiner Frau Barbara und seiner Stieftochter Regine endgültig Graz und fährt über Linz nach Prag.

In Prag erlebt Kepler äußerst anregende Jahre in der Zusammenarbeit mit Tycho Brahe und schreibt sowohl seine bedeutendsten Arbeiten in der Astronomie wie z. B. die ASTRONOMIA NOVA, Heidelberg, 1609, aber auch interessannte mathematische Werke, z.B. über die Form von Schneeflocken, die auf wichtige geometrische Probleme hinauslaufen. In der Folge des Bruderzwistes im Hause Habsburg gerät Kepler in politische Wirren und flüchtet von Prag.

Mitte Mai 1612 trifft Johannes Kepler in Linz ein. Er übt dort das Amt eines Landschaftsmathematikers aus. Hier soll er das Land Oberösterreich vermessen und er wird mit der *"Aufrichtung und Verfassung einer Landmappe, einer Ortsbeschreibung von Österreich, Steyermark und Kärnten"* betraut. Daneben ist er noch Lehrer für Mathematik und Philosophie an einer höheren Schule. Seine Wiederverheiratung gibt Anlass zum Verfassen eines neuen mathematischen Werkes:

NOVA STEREOMETRIA DOLIORUM VINARIORUM, Lincii. M.DC.XV.
Im Widmungsblatt schreibt Johannes Kepler über die Entstehungsgeschichte: *"Es war im vergangenen November* [1613]. *Ich hatte eben eine neue Gattin heimgeführt. Österreich schickte nach einem ebenso reichen wie guten Weinherbst eine Menge Lastschiffe die Donau herauf, um seinen Reichtum mit unserem Noricum zu teilen, und das ganze Linzer Ufer bot ein Bild, als wäre es zugebaut mit Weinfässern, die für einen annehmbaren Preis zu kaufen waren. Da fühlte ich mich als Gatte und guter Familienvater verpflichtet, für mein Haus nach dem nötigen Getränk Ausschau zu halten. Ich ließ mir daher etliche Fässer ins Haus bringen und einkellern. Vier Tage danach kam der Verkäufer mit einer Messrute, einer einzigen nur, mit der er von allen Fässern samt und sonders der Reihe nach, ohne Unterschied, ohne Rücksicht auf die geometrische Gestalt, ohne weitere Überlegung oder Rechnung den Inhalt ermittelte. Er schob einfach die metallene Spitze der Rute durch das Spundloch des Fasses schräg hinein bis zur tiefsten Stelle des einen und dann des anderen kreisförmigen Holzdeckels, die in der Umgangssprache Böden heißen. Erwies sich die Länge vom höchsten Punkt des Bauches bis zum tiefsten der kreisrunden Bretter beiderseits als gleich, so gab er nach der Zahlenmarke, die der Rute am Ende der gemessenen Länge aufgeprägt war, die Zahl der Eimer an, die das Fass halten sollte. Nach dieser Zahl wurde der Preis errechnet."*

Ursprünglich sollte dieses Werk nur eine kleine Rechtfertigungsschrift für das Messen des Fassinhaltes mittels der Visierrute sein. Er berechnete dabei die Volumina von Fässern, aber auch von anderen Rotationskörpern, denen er die Namen von Früchten wie Äpfel, Oliven und Zitronen gab. Im Laufe der Zeit wurde aber daraus ein Lehrbuch über die Volumsbestimmung von Rotationskörpern, aufbauend auf Archimedes, aber weit darüber hinausgehend. Kepler gab erste Anstöße zur Infinitesimalrechnung, indem er mit unendlich kleinen Größen rechnete, er nahm die Einteilung eines Körpers in unendlich kleine Schichten vor, so wie es nach ihm auch CAVALIERI gemacht hat. So kommt er zur jetzt nach ihm benannten *Keplerschen Fassregel*, eine Näherungsformel für das Integral einer Funktion. Schließlich weist er mittels Maximumuntersuchungen nach, dass die Form der österreichischen Fässer am besten für das Messen mit Visierrute geeignet ist. Denn es ist deren Form so angelegt, dass kleine Abweichungen im Bau nur kleine Abweichungen des Messergebnisses bewirken. Das österreichische Fass ist, im Verhältnis von Länge und

Breite so konstruiert, dass es bei gegebener Visierrutenlänge maximalen Inhalt liefert. Mit dieser mathematischen Andeutung wollen wir uns hier zufrieden geben.

Die NOVA STEREOMETRIA ist wohl Keplers bedeutendstes mathematisches Werk. So wird es von Paulus Guldin zum Anlass genommen, Cavalieri des Plagiates zu bezichtigen. Er machte Cavalieri den Vorwurf, als eigene Erfindung veröffentlicht zu haben, was er aus den Schriften von Kepler (u.a.) entnommen habe. Kepler hat die Verwendung des *"Unendlich Kleinen"* in der Geometrie eingeführt. So hat er sich zum Beispiel den Kreis aus unendlich vielen gleichschenkeligen Dreiecken mit der Höhe des Kreisradius' vorgestellt und so die Kreisflächenformel angegeben. Analog ist er auch bei der Volumsformel für die Kugel vorgegangen. Guldin sparte allerdings auch nicht mit Kritik an Kepler, *"er habe zu wenig Gewicht auf geometrische Reinheit und Genauigkeit gelegt, habe sich auf Conjekturen und Analogien verlassen, nicht immer wissenschaftlich geschlossen und überdies Alles in dunkler Weise vorgestellt"* (Cantor, S. 841). Weiters ist auch bekannt, dass Isaac Newton Keplers NOVA STEREOMETRIA gelesen und von ihr beeinflusst worden ist.

Im Anschluss an die NOVA STEREOMETRIA schrieb Kepler eine deutschsprachige Version unter dem Titel *"Messkunst des Archimedes."* Diese ist einerseits eine vereinfachte Version der NOVA STEREOMETRIA, geht aber andererseits darüber hinaus. So werden auch die Messmethoden auf nicht voll gefüllte Fässer erweitert, (*"nützlich für Familienväter zum Erweis und zur Entdeckung von Diebstählen"*), andererseits werden auch Standards über Maßeinheiten vorgeschlagen. Außerdem macht er noch Reklame für das Bürgische Rechnen mit Dezimalbrüchen und die Verwendung des Bürgischen Dezimalpunktes. Nicht zuletzt bemüht sich Kepler um eine Verdeutschung der bis dahin nur in Griechisch oder Latein existierenden Fachbegriffe. So führt er in der *Messkunst des Archimedes* eine ganze Liste von deutschen Übersetzungen und deren ursprüngliche Bezeichnungen an. Manche dieser Begriffe (z.B. "Kegelschnitte") haben sich bis heute erhalten.

5.4.1.2 Paulus Guldin (* 12.6.1577, Mels im heutigen Kanton St. Gallen, † 3.11.1643, Graz). Guldin war Professor für Mathematik an der damaligen Jesuitenuniversität in Graz.

Paulus Guldin ist weltweit bekannt durch die ***Guldinschen Regeln*** . Diese liefern Formeln zur Berechnung von Oberflächen und Volumen von Rotationskörpern. Sie werden heute noch, zumindest an Technischen Hochschulen, in Vorlesungen über Analysis gelehrt und sind auch in Standardlehrbüchern über Differential- und Integralrechnung enthalten (siehe z.B. F. ERWE Differential- und Integralrechnung. Band 2: Integralrechnung, Seite 181f.):

ERSTE GULDINSCHE REGEL: *Der Rauminhalt eines Rotationskörpers ist gleich Flächeninhalt der erzeugenden Punktmenge mal Weg des Schwerpunktes*[21] *der erzeugenden Punktmenge.*

ZWEITE GULDINSCHE REGEL: *Die Oberfläche einer Rotationsfläche ist gleich Länge der erzeugenden Kurve (Meridiankurve) mal Weg des Schwerpunktes dieser Kurve.*

Diese Regeln wurden von GULDIN im II. Buch seiner *"Centrobaryca"* veröffentlicht, einem Werk bestehend aus 4 Büchern, die zwischen 1635 und 1641 in Wien erschienen sind. Man findet sie aber bereits schon bei den *Collectiones* von Pappos (siehe Seite 49).

[21] *Gemeint ist: Weg, der bei der Rotation zurückgelegt wird, also 2π mal Abstand des Schwerpunktes von der Rotationsachse*

Abbildung 20: *Links: Widmungsbild (ca. 1650) von Paulus Guldin, der der Universität Graz viele wertvolle Bücher hinterlassen hat. Rechts: Ausschnitt aus dem Titelkupfer des II. Buches seiner "Centrobaryca", Wien 1640.*

Es erhebt sich die Frage, inwieweit Guldin diese Regeln von Pappos gestohlen hat. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies der Fall war, ist sehr groß, zumal, wie ein Textvergleich zwischen Guldin und Pappos zeigt, sowohl die Wortwahl wie auch die etwas ungewöhnliche mathematische Formulierung der Regeln, bei beiden fast identisch ist (siehe D. Gronau [9]).

5.4.1.3 Bonaventura Cavalieri (1588 – 1647). Er kann als wichtiger Vorläufer der Infinitesimalrechnung bezeichnet werden. In seinem Werk *"Geometria indivisibilibus ... " (1635)*, einer Theorie des *"Unendlich Kleinen"*, gibt er mit seiner Methode Flächen- und Volumsformeln der verschiedensten geometrischen Figuren an. Vieles davon war zwar schon bei Archimedes bekannt und auch Kepler unter verwendete das Unendlich Kleine, Cavalieri hat jedoch diese Methode systematisch angewendet. Benannt nach ihm ist das *"Cavalierische Prinzip":* Haben zwei Raumkörper K_1, K_2 die gleiche Höhe und gilt für deren Schnittflächen $S_1(x), S_2(x)$ mit einer Ebene die parallel zur Grundfläche im Abstand x liegt jeweils: $S_1(x)/S_2(x) = c$ (konstant), dann gilt auch $K_1/K_2 = c$.

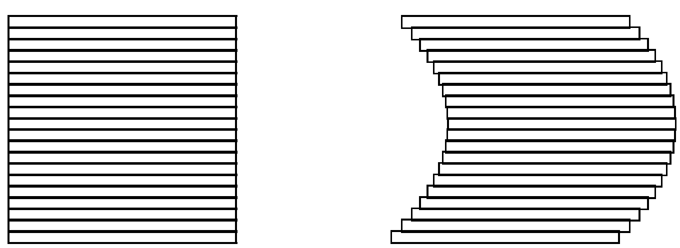


Abbildung 21: *Cavalierisches Prinzip*

Es gelang ihm auch die Parabeln zu integrieren, also in heutiger Notation die Formeln

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}a^3 \quad \text{und} \quad \int_0^a x^3 dx = \frac{1}{4}a^4$$

und durch Induktion sogar auch $\int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1}a^{n+1}$, $n = 2, 3, ..., 9$ zu berechnen. Dies war aber auch schon von anderen Mathematikern, wie Fermat (siehe Seite 83) oder Wallis erledigt worden.

5.4.1.4 René Descartes (1596 - 1650). Er war Philosoph, Mathematiker und Naturforscher in Einem. Descartes hat mit seiner rationalistisch geprägten Naturphilosophie die wissenschaftliche Erneuerung im 17. Jhdt. wesentlich vorangetrieben. In seinem Werk *"Discours de la méthode ..."*, das unter dem Eindruck der Verurteilung von Galileo Galilei 1637 anonym erschien, befinden sich drei Anhänge über die Geometrie, die Meteore und die Dioptrik (Lehre von der Brechung des Lichtes). In der Geometrie entwickelt er algebraische Methoden, das was man heute *"kartesisches Koordinatensystem"* nennt liegt im Ansatz vor. Er befasst sich hier auch mit Nullstellen algebraischer Gleichungen (kartesische Vorzeichenregel, Anzahl der Nullstellen). Die von ihm verwendete Symbolik (durchgehende Verwendung der Zeichen $+$ und $-$, Potenzschreibweise, Quadratwurzelzeichen, Bezeichnung der Unbekannten mit den letzten Buchstaben im Alphabeth etc.) haben sich bis heute erhalten.

5.4.1.5 Pierre Fermat $(1601 - 1665)$, Jurist und Hobbymathematiker. Man kann ihn als Mitbegründer der analytischen Geometrie und Vorläufer in der Differentialrechnung (Tangentenproblem, Maxima- und Minimabestimmung) und Integralrechnung (siehe Seite 83) bezeichnen. Weiters ist er auch durch viele Beiträge in der Zahlentheorie und der Wahrscheinlichkeitstheorie, aber auch in der Optik (Brechungsgesetz, Fermatsches Prinzip) bekannt. Wie auch darüberhinaus noch gesagt werden kann, dass die "moderne" Zahlentheorie gerade zu Zeiten von Fermat, wenn nicht sogar durch ihn, ihre Anfangsentwicklung erhalten hat.

Bekannt geworden ist Fermat insbesondere durch die

5.4.1.5.1 Fermatsche Vermutung. Sie lautet: *Die Gleichung*

$$X^n + Y^n = Z^n \tag{2}$$

besitzt für $n > 2$ keine Lösung aus der Menge der natürlichen Zahlen.

Die Unlösbarkeit der Fermat-Gleichung für die Primzahl $n = 3$ und für $n = 4$ ist von Euler (zwischen 1753 und 1770) gezeigt worden, wobei Legendre 1830 eine kleine Lücke im Beweis schloss. Für $n = 5$ wurde dies von Dirichlet und (unabhängig davon) von Legendre zwischen 1825 und 1828 bewiesen.

Später befasste sich (neben vielen Anderen) Ernst Eduard Kummer (1801-1893) mit der Fermatschen Vermutung. In Verlauf seiner Studien begründete er die ***Idealtheorie***, heute eine wichtige Theorie in vielen Sparten der Algebra und der Algebraischen Geometrie. Ihm ist es allerdings "nur" gelungen, die Unlösbarkeit von (3) für alle sog. *regulären* Primzahlen zu beweisen.

Die Fermatsche Vermutung regte viele Mathematiker zu intensiven Forschungen an und kann als Katalysator in der Weiterentwicklung der Zahlentheorie und der Algebra betrachtet werden. Es wurde sogar ein Geldpreis von beträchtlicher Höhe, der aber durch Inflationen vermindert wurde, ausgesetzt (die sog. Wolfskehl-Stiftung mit Sitz in Göttingen). Teile der Vermutung und Vorarbeiten zum Gesamtbeweis wurden viele erbracht. Vor einigen Jahren (1993) wurde ein Beweis der Fermatschen Vermutung von dem englischen Mathematiker Andrew J.Wiles veröffentlicht, wobei verschiedenste Disziplinen der modernen Zahlentheorie und Algebraischen Geometrie zur Anwendungen kommen. Da dieser Beweis äußerst kompliziert und umfangreich ist, dauerte die Skepsis über seine Richtigkeit eine Zeit lang an. Inzwischen ist aber die Richtigkeit der Fermatschen Vermutung erwiesen und A. Wiles hat am 27. Juni 1997 den Wolfskehl-Preis erhalten.

5.4.1.6 Christiaan Huygens (1629 - 1695), Den Haag. Neben seinen Beiträgen zur Physik (Wellentheorie des Lichtes), Astronomie und seinen Erfindungen (Pendeluhr, Unruh) sind auch seine Beiträge zur Mathematik von Bedeutung: Quadratur der Parabeln, Tangenten an Kurven, Wendepunkte, Krümmungsradius etc.

Weitere bedeutende Wegbereiter der Infinitesimalrechnung sind John Wallis, 1616 – 1703, (Wallissches Produkt für $\pi/4$) und Isaac Barrow, 1630 – 1677. Letzterer hat als Lehrer von Newton einen großen Einfluss auf ihn ausgeübt und Grundideen zur Infinitesimalrechnung (Zusammenhang zwischen Integration und Tangentenproblem) vorweggenommen.

5.4.2 Entdecker der Infinitesimalrechnung.

Der Infinitesimalkalkül wurde von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) und Isaac Newton (1643 – 1727) unabhängig voneinander erfunden. Um diese Errungenschaft kam es in der Folge zu einem heftigen Prioritätenstreit. Wie man heute weiß, war Newton derjenige, der seine Differential- und Integralrechnung zuerst ausgearbeitet hatte, Leibniz hat seine Theorie als erster veröffentlicht.

5.4.2.1 Isaac Newton (1643–1727)**.** Er nennt seine Methode, eine physikalisch orientierte Infinitesimalrechnung, ***Fluxionsrechnung***. Alle Veränderlichen sind physikalische Größen, die von der Zeit abhängen, die sog. *Fluenten*. Ihre Geschwindigkeiten (Ableitungen nach der Zeit) heißen *Fluxionen* in Zeichen $\dot{x}$. Die Fluxion einer Fluxion ist also die Beschleunigung. Das Problem, eine Fluente zu gegebener Fluxion zu bestimmen, entspricht der Integration. Newton macht von seiner Fluxionsrechnung reichlich in Problemen der Geometrie Gebrauch, wie Maxima- und Minimabestimmung, Tangentenproblemen, Rektifikation von Kurven. Auch behandelt er Differentialgleichungen. Seine berühmtestes Werk, die für die Physik grundlegende *"Principia"* macht dagegen keinen Gebrauch der Fluxionsrechnung. Newton behandelt auch unendliche Reihen, insbesondere die *"Binomialreihe"* (allgemeine Potenzen), die er in die Fluxionsrechnung einbezieht.

5.4.2.2 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Leibniz entdeckte die Infinitesimalrechnung, indem er den Zusammenhang zwischen Quadratur (Integration) und Tangentenproblem (Differentiation) erfasste. Er verwendete für die Ableitung das Zeichen

d, gab Differenziationsregeln bis hin zur Kettenregel, Bedingungen für Extremwerte und Wendepunkte an und verwendete für das Integral das Zeichen $\int$. Auf ihn gehen auch die Ausdrücke *Funktion* und *Koordinaten* zurück.

5.4.2.3 Prioritätenstreit zwischen Leibniz und Newton. Dieser brach um 1685 aus. Die englischen Mathematiker hatten über Leibniz, der in jungen Jahren in London keine gute Figur machte, einen äußerst schlechte Meinung. Sie behaupteten, dieser habe seine Infinitesimalrechnung aus einem Buch von Barrow entnommen, ohne diesen zu zitieren. Newton selbst schreibt in seiner *Princpia*, dass er schon vor Leibniz seine Infinitesimalrechnung entdeckt habe und Leibniz sie unter wesentlicher Verwendung von Newtons Ideen sie sozusagen nachentdeckt hat. Englische Mathematiker griffen in den Streit zugunsten von Newton ein, die Schüler und Anhänger von Leibniz in Frankreich, der Schweiz und Deutschland stellten sich auf die Seite von Leibniz, der Streit wurde sehr heftig und endete erst mit dem Tode von Leibniz und Newton.

Dieser Streit hatte eine Isolierung der englischen Mathematiker zur Folge, die auf der etwas schwerfälligeren Notation von Newton beharrten und dadurch die Weiterentwicklung des Leibnizschen Kalküls versäumten, das heißt erst mit hundertjähriger Verzögerung übernahmen. Hier spielte zum Beispiel dann Charles Babbage und der *Kreis der Analytiker* eine positive Rolle.

5.4.3 Nachwort

Zur Weiterentwicklung der Infinitesimalrechnung, die ja nach den Entdeckungen von Newton und Leibniz erst richtig anfing zu wachsen, und zum Ausbau des Calculus gäbe es noch viel zu erzählen. Hier sollen noch einige Namen genannt werden. In erster Linie ist die Familie der Bernoullis zu erwähnen, die über 5 Generationen Mathematiker von Weltrang hervorgebracht hat, insbesondere Johann I (1667 -1748), auf ihn geht z.B. die erste Definition einer Funktion zurück, und auch die sog. *"Regel von de l'Hospital"*, er war auch Lehrer von Leonhard Euler, (1707 – 1783), dessen Beiträge zur Analysis immens sind, ein großer Teil der heute verwendeten mathematischen Symbole wurden von ihm eingeführt. Viele andere wären noch zu erwähnen.

Zu den Grundlagen der Analysis haben vor allem die folgenden Mathematiker Fundamentales beigetragen: Bernard Bolzano, 1781–1848, Prag, Augustin Louis Cauchy, 1789 – 1857, Bernhard Riemann, 1826 – 1866), ...

Ein Ziel dieser Vorlesung ist, zum weiteren Studium von Büchern über die Geschichte der Mathematik anzuregen. Es gibt inzwischen davon immer mehr und von immer größerer Qualität.

6 Anhang

Literatur

[1] Baron, Margaret E.: The origins of the infinitesimal calculus. Dover Publ. Inc., New York, 1969.

[2] Boyer, Carl B. & Uta C. Merzbach: A History of Mathematics. John Wiley & Sons, New York etc., 1968/1989

[3] Bourbaki, Nicolas: Elemente der Mathematikgeschichte. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1971.

[4] Cantor, Moritz: Geschichte der Mathematik. Bd 1 - 4. Teubner Leipzig, 1900.

[5] Edwards, C.H. Jr.: The Historical Develoment of the Calculus. Springer-Verlag, New York etc., 1979 und 1982.

[6] Euklid: Die Elemente, Buch I-XIII, übersetzt und herausg. von Clemens Thaer. Verlag Harry Deutsch, Thun und Frankfurt(/Main, 1997.

[7] Gericke, Helmuth: Mathematik in Antike und Orient - Mathematik im Abendland (Sonderausgabe in einem Band). Fourier Verlag, Wiesbaden, 1992, 3. Aufl. 1994.

[8] Gottwald, S., Ilgauds, H.-J. und Schlote, K.-H.(Hrsg.): Lexikon bedeutender Mathematiker. Bibliographisches Institut Leipzig, 1990.

[9] Gronau, D: *Paulus Guldin (1577 - 1643).* In: Rainer Gebhardt(Hrsg.): Rechenbücher und mathematische Texte der Neuzeit. Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz - Band 11, 229-240. Annaberg Buchholz, 1999.

[10] Gronau, D: *Die Logarithmen, von der Rechenhilfe über Funktionalgleichungen zur Funktion.* Tagungsbericht der Sektionstagung der Fachsektion Geschichte der Mathematik der DMV, Calw/Nordschwarzwald, 1997. Erschienen in: Michael Toepell (Hrsg.): Mathematik im Wandel. Anregungen zu einem fächerübergreifenden Mathematikunterricht, Band 2. div verlag, Franzbecker, Hildesheim - Berlin, 2001, 127–145.

[11] Hogben, Lancelot: Die Welt der Mathematik. Verlag Buch und Welt. Klagenfurt, 1970.

[12] Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen.Campus Verlag, Frankfurt/New York,1991.

[13] Jörgensen, Dieter: Der Rechenmeister. Roman, Rütten und Lönnig, Berlin, 1999.

[14] Kaiser, Hans & Wilfried Nöbauer: Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht, Verlag Hölder-Pichler-Tempski, Wien, 1984.

[15] Kline, Morris: Mathematical Thoughts, from ancient to modern times. Vol. 1-3. Oxford University Press, New York, Oxford, 1972.

[16] Martzloff, Jean-Claude: A History of Chinese Mathematics. Springer Verlag, Berlin etc., 1997

[17] Meschkowski, Herbert: Mathematiker-Lexikon. BI Mannheim 1973.

[18] Needham, Joseph: Science and Civilisation in China, Vol. 3, Mathematics and the Science of the Heavens and the Earth. Cambridge University Press, 1959.

[19] Netz, Reviel, Noel, William: Der Kodex des Archimedes. Das berühmteste Palimpsest wird entschlüsselt. Verlag C.H. Beck, München, 2007.

[20] Pfeiffer, Janne & Amy Dahan-Dalmedico: Wege und Irrwege - Eine Geschichte der Mathematik. Birkhäuser Verlag, Basel W Boston W Berlin, 1994.

[21] Smith, David E.: History of Mathematics, Vol. I + II. Dover Publ. Inc. New York, 1923/1958.

[22] Struik, Dirk J.: Abriss der Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1961.

[23] Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementarmathematik. W. de Gruyter Berlin etc. (mehrere Bände und Auflagen!)

[24] Waerden, Bartel L. van der: Erwachende Wissenschaft. Birkhäuser Verlag. Basel und Stuttgart, 1956.

[25] Waerden, Bartel L. van der: A History of Algebra, Springer Verlag Berlin etc., 1985.

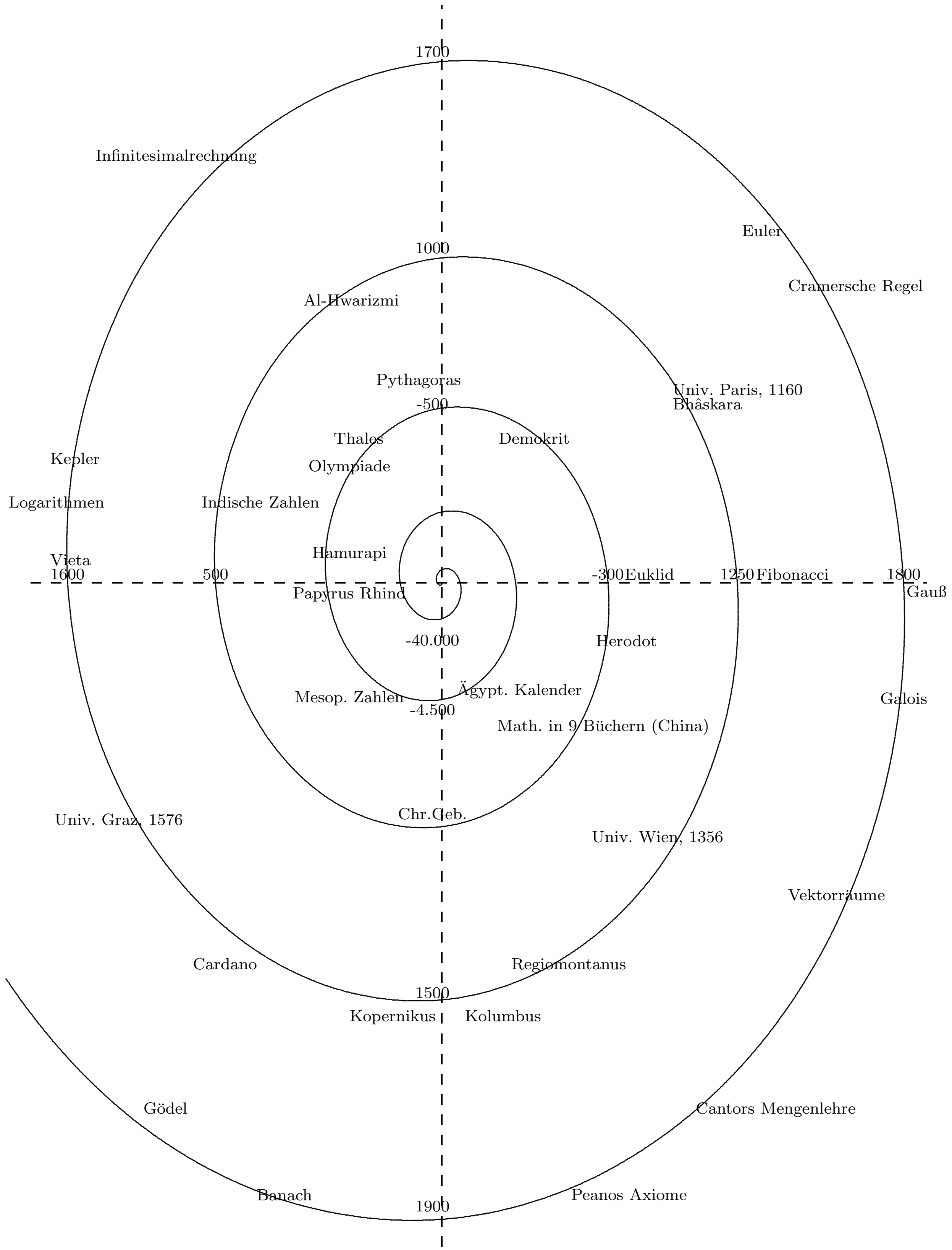
[26] Wussing, Hans: Vorlesung zur Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1979 (1. Aufl), Berlin 1987 (2. Aufl).

[27] Wussing, Hans & W. Arnold (Hrsg.): Biographien bedeutender Mathematiker. Berlin 1985.

[28] Wussing, Hans u.a: Vom Zählstein zum Computer, Mathematik in der Geschichte. Bd. 1: Überblick und Biographien. Verlag Franzbecker, Hildesheim, 1997.

[29] Zuse, Konrad: Der Computer - mein Lebenswerk. Springer Verlag, Berlin [u.a.], 1993.

6.1 Geschichtliche Spirale



6.2 Historische Tabelle

-2,000.000 *Ursprung der Menschheit*

-50.000 Anfänge des Zählens

-25.000 Einfache geometrische Ornamente

-4241 Hypothetischer Beginn des ägypischen Kalenders

-3000 Hieroglyphische Zahlen in Ägypten

-2800 *Bau der großen ägyptischen Pyramiden*

-2400 Positionssystem in Mesopotamien

-1850 Moskauer Papyrus und Papyrus Rhind, erste erhaltene mathematische Schriften aus Ägypten

-776 *Erste Olympiade*

∼-600 Anfänge der altgriechischen Mathematik (Thales von Milet)

∼-300 Die “Elemente” des Euklid von Alexandrien

-212 Ermordung Archimedes’ durch einen römischen Soldaten

∼-200 “Mathematik in neun Büchern”, erstes bekanntes math. Werk in China

529 Schließung der Schule von Athen markiert das Ende des Altertums

∼600 Indisches Zahlsystem

∼628 Brahmagupta (Indien), “Vervollkommnung der Lehre des Brahmas”, Arithmetik, Algebra, Geometrie

∼830 Al-Hwarizmi (Bagdad), Die “Algebra”

∼1150 Bhâskara II (Indien), “Der Kranz der Wissenschaften”

1202 Fibonacci, “Liber abaci”

∼1270 Reisen des Marco Polo, Erfindung von mechanschen Uhren und Augengläsern

1476 Tod des Regiomontanus

1492 Columbus entdeckt Amerika

1495 Luca Pacioli, “Summa de Arthmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalità”

1525 Christoff Rudolff, “Die Coß”

1543 Nicolaus Copernicus, “De revolutionibus”

1544 Michael Stifel, “Arithemica integra”

1545 Girolamo Cardano, “Ars magna”

1585 Gründung der Universität Graz

1594 Johannes Kepler kommt nach Graz

1603 Tod des François Vieta

1614 Die Logarithmen von John Napier

1620 Die Logarithmen von Jobst Bürgi

1684 Leibnitz’s erste Arbeit über Differential- und Integralrechnung

1687 Isaac Newton, “Principia Mathematica”

1696 Die Regel von de l’ Hospital

1748 Leonhard Euler “Introductio in analysin infinitorum”

1750 Die Cramersche Regel

1799 Carl Friedrich Gauß, “Disquisitiones arithmeticae”

1832 Evariste Galois, Theorie der Gleichungen

1874 Georg Cantors Mengenlehre

1889 Axiome von Peano

1899 David Hilbert, die Grundlagen der Geometrie

1923 Banachräume

1931 Gödels Theoreme

1941 Erste elektronische programmierbare Rechenmaschine (Zuse)

1944 Kategorien und Funktoren von Eilenberg und MacLane

1977 Erster Personal Computer (Apple)

1993 Beweis der Fermatschen Vermutung durch Andrew Wiles

Index